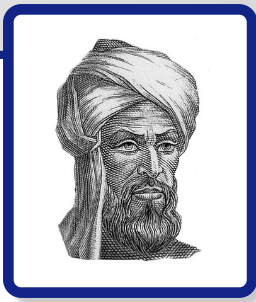
2. Second degré



> Les savants des temps passés et des nations révolues n'ont cessé de composer des livres. Ils l'ont fait pour léguer leur savoir à ceux qui les suivent. Ainsi demeurera vive la quête de la vérité.
>
> — Al-Khawarizmi

2.1 Introduction

La résolution d'équations a été et est toujours aujourd'hui au coeur de la pratique des mathématiques. Non seulement elle est essentielle dans notre discipline en elle même, mais elle est surtout très utile dans les autres sciences dures. Modéliser un phénomène de la vie réelle en physique, chimie ou encore en science de la vie et de la terre nous mène toujours vers des expressions sous forme d'équations. Il ne faut donc pas être surpris de voir que les mathématiciens ont passé beaucoup de temps à élaborer des méthodes de plus en plus compliquées pour les résoudre.
Dans ce chapitre, nous allons principalement nous intéresser à des équations qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Avec :
- $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
- x est une inconnue qui vérifie l'égalité.

Ce type d'équations s'appelle : **Une équations polynomiale du second degré à une seule variable**.
Les mathématiciens savent résoudre ce genre d'équations depuis le $9^{éme}$ siècle. C'est en effet le mathématicien perse **Al Khawarizmi** (qui au passage à donné son nom

aux algorithmes) qui a posé la méthode utilisée jusqu'à aujourd'hui.
Dans son ouvrage nommé : *Livre de la remise en place et de la simplification*, il décrit les méthodes de résolutions des équations de degré 1 et 2, qu'il sépare en plusieurs cas suivant les signes des différents termes. Les méthodes sont purement algébriques, mais, influencé par les mathématiciens grecs, il les complète toujours par un procédé géométrique de résolution.
Même si la contribution d'Al Khawarizmi est considérable dans le domaine de l'algèbre, il resta toute sa vie très déçu de ne pas avoir pu aller au-delà de la résolution des équations de second degré. Il était fasciné par l'idée de trouver une méthode qui pourrait permettre de résoudre n'importe quelle équation sous la forme $P(x) = 0$, loin de se douter que c'était en fait impossible.

Il faudra attendre sept siècles complets, avec tout autant de mathématiciens déçus, avant que les équations du troisième et quatrième degrés ne soient résolues par radicaux. On doit cet exploit à deux mathématiciens de la renaissance italienne : **Nicolo Fontana**, dit "**Tartaglia**" et **Girolamo Cardano**.

La dernière étape de cette aventure aura lieu entre **1799** et **1824** avec le théorème **d'Abel-Ruffini**, qui vient prouver qu'il n'y a aucun moyen de résoudre, par radicaux, les équations algébriques dont le degré est supérieur à 5. Cela va forcer les mathématiciens à chercher des méthodes alternatives et mènera plus tard vers la mise en place de toute une théorie qui s'appelle *la théorie de Galois*. Mais c'est encore une autre histoire !

Un peu d'étymologie :
Le mot "**Polynôme**" provient des racines grecques **poly** et **nôme**.
- **nôme :** Du grec ancien **polus** qui peut être traduit par beaucoup ou plusieurs. C'est un préfixe utilisé pour signifier que le mot global est constitué de plusieurs éléments du type du mot qui le suit.
- **nôme :** vient du mot grec **onoma** signifiant nom ou terme.

2.2 Fonction polynôme de second degré

Définition 2.1: Fonction polynôme de second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme de second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

On pourra abréger le nom en appelant cette fonction : **un polynôme du second degré** ou encore un **trinôme**.
Les nombres a, b, c sont appelés **coefficients du polynôme de second degré**.

Exemple 2.1

1. Les fonctions suivantes sont toutes des **polynômes du second degré** :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x^2 - 6x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^2 - 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-1)(2x+5) \end{array}$$

   La fonction h est également un polynôme de second degré car on peut écrire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(2x+5) = 2x^2 + 3x - 5$.

2. **La fonction carrée** que vous avez vu l'année dernière est un polynôme de second degré. C'est un cas particulier où : $a = 1$; $b = 0$ et $c = 0$.

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 5\sqrt{x} + 3$ **n'est pas un polynôme de second degré**.

4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x + 3$ **n'est pas un polynôme de second degré**.

La définition donnée d'un trinôme nous permet donc d'établir qu'il suffit de disposer de trois nombres réels a, b et c pour le définir complètement(Avec $a \neq 0$). Le théorème qui suit va plus loin pour affirmer qu'on ne peut, avec un triplet unique de nombres (a, b, c) créer qu'un seul et unique polynôme de second degré.

Théorème 2.1: Unicité des coefficients

Soient f et g deux polynômes de second degré définis sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad et \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c'$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x)$ alors $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$.

Démonstration.
Soient f et g deux polynômes définis comme dans le théorème ci-dessus.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) \Rightarrow c = c'$
   (**Indice : si une égalité est vraie pour tout réel alors elle l'est en particulier pour** 0)
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) \Rightarrow x(ax + b) = x(a'x + b')$
3. En déduire que $a = a'$ et $b = b'$
   (**Indice : Vous avez vu en seconde que deux fonctions affines qui prennent la même valeur en deux points distincts sont égales**)
4. Conclure.

$\square$

Vous avez sans doute remarqué que ce théorème a été écrit sous la forme d'une implication. Il est donc très légitime de se demander si la réciproque est vraie ?
Une autre question intéressante concerne le nombre de points d'égalités suffisants pour deux polynômes afin de vérifier l'égalité des coefficients ?
Je vous laisse réfléchir aux réponses à titre d'exercice.

2.3 Forme canonique d'un polynôme de second degré

Théorème 2.2: forme canonique

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
Il existe un unique couple de nombres réels $(\alpha; \beta)$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette écriture est **unique** et s'appelle **la forme canonique de** f.

Sachez que le mot "canonique" vient de la racine latine **canonicus** qui signifie *conforme aux règles*.

Démonstration.
Ce théorème contient deux affirmations à démontrer :
- L'existence du couple $(\alpha;\beta)$.
- L'unicité de ce couple pour tout polynôme f.

Commençons par l'unicité de $(\alpha;\beta)$: On suppose qu'il existe deux couples de réels $(\alpha;\beta)$ et $(\alpha';\beta')$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = a(x-\alpha')^2 + \beta' \qquad (1)$$

1. Montrer que l'égalité (1) implique que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-\alpha)^2 - (x-\alpha')^2 = \frac{\beta'-\beta}{a}$$
2. Appliquer l'égalité de la question précédente aux cas $x=\alpha$ et $x=\alpha'$.
3. En utilisant la transitivité de l'égalité, déduire que $\alpha=\alpha'$ puis que $\beta=\beta'$

Pour démontrer l'existence du couple $(\alpha;\beta)$, il faut démontrer qu'elle découle du choix des nombres a, b, c. Autrement dit, il faut réussir à écrire α et β en fonction de a, b et c :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
Montrer qu'on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}$$

(Cette partie est un peu technique, prenez le temps qu'il faudra pour bien réfléchir)

Ainsi, en posant : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$ on aboutit au résultat demandé. □

Exemple 2.2: Déterminer la forme canonique d'un polynôme

Déterminons la forme canonique de $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2-6x+5 \end{array}$

- **Première méthode :** Appliquons les formules. On a un polynôme de second degré avec $a=2; b=-6$ et $c=5$.
Ainsi : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{2\times 5} = \dfrac{3}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.
D'où la forme canonique de f qui est donnée par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$
- **Deuxième méthode :** Dans l'esprit de la démonstration, mettons le coeffi-

cient de x^2 en facteur puis cherchons à exhiber une identité remarquable. Comme ceci :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= 2x^2 - 6x + 5 \\
&= 2\left[x^2 - 3x + \frac{5}{2}\right] \\
&= 2\left[x^2 - {\color{red}2} \times \frac{3}{{\color{red}2}}x + {\color{red}\frac{9}{4}} - {\color{red}\frac{9}{4}} + \frac{5}{2}\right] \\
&= 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{5}{2}\right] \\
&= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.4 Variation et représentation graphique

Théorème 2.3: Sens de variation d'un polynôme de second degré

Les variations d'un polynôme de second degré f définie par sa forme canonique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

dépendent uniquement du signe de a et de la valeur de α. Ainsi :

— **Si** $a > 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

— **Si** $a < 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration.
La méthode la plus simple de démontrer ce résultat passe par l'utilisation des

dérivées. Nous allons voir cela dans un chapitre ultérieur.
Le résultat est quand même démontrable par enchaînement d'inégalités. Il est utile de rappeler ici, la définition suivante : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I :
— f est croissante sur I si et seulement si pour tout couple d'éléments distincts de I notés (x, y) on a : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
— f est décroissante sur I si et seulement si pour tout couple d'éléments distincts de I notés (x, y) on a : $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Utilisez cette définition pour démontrer le théorème en faisant une disjonction de cas sur le signe de a puis sur les intervalles $]-\infty;\alpha[$ et $]\alpha;+\infty[$. □

Définition 2.2

La représentation graphique, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, de la fonction polynôme du second degré f de forme canonique sur $\mathbb{R}$: $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est **une parabole de sommet** $S(\alpha; \beta)$.

Exemple 2.3: Représentation graphique de deux fonctions

1. La fonction f définie par :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2(x-2)^2+3 \end{array}$$

admet comme représentation graphique, la parabole suivante :

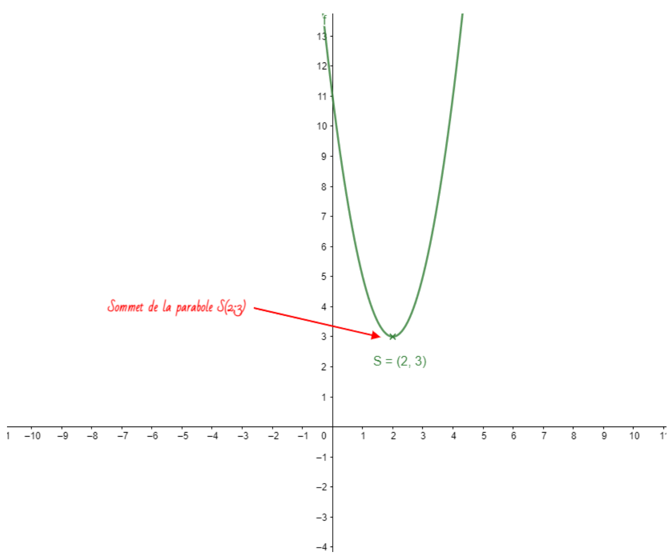


Figure 1 : Représentation graphique de la fonction f.

2. La fonction g définie par :

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2(x-2)^2+3 \end{array}$$

admet comme représentation graphique, la parabole suivante :

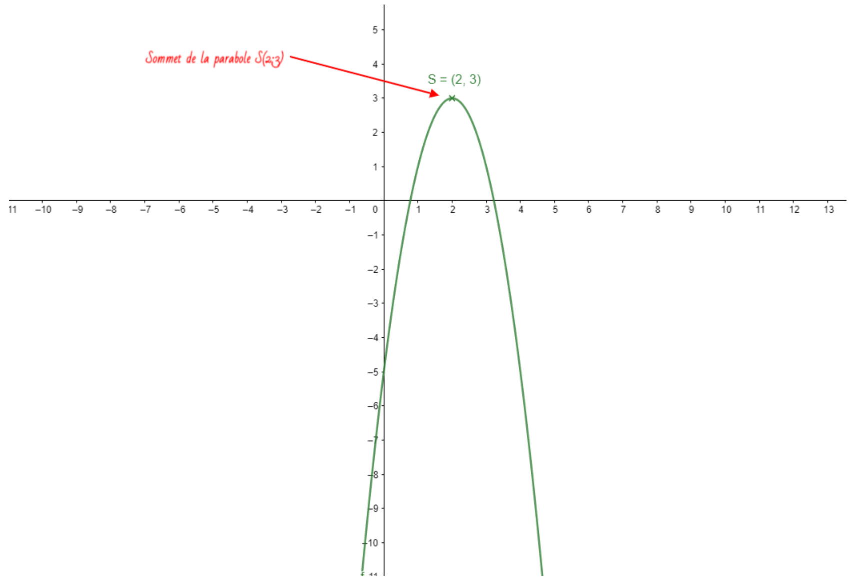


Figure 2 : Représentation graphique de la fonction g.

Cet exemple nous permet de faire les conjectures suivantes (vous êtes invités à les démontrer !) :

— Le signe de a contrôle **l'orientation de la parabole** : L'ouverture est vers le haut lorsque $a > 0$ et vers le bas lorsque $a < 0$.

— La parabole **admet un axe de symétrie** d'équation $y = \alpha$.

2.5 Résolution des équations de second degré

Définition 2.3: Équation du second degré

On appelle **équation de second degré**, toute équation notée (E) qui est équivalente à une équation du type $f(x) = 0$ d'inconnue x et où f désigne un polynôme de second degré.

Exemple 2.4

1. $3x^2 + 7x - 3 = 0$ est équation de second degré.
2. $12x^2 + 5x = 10x - 12$ est également une équation de second degré. En effet, on peut écrire : $12x^2 + 5x = 10x - 12 \iff 12x^2 - 5x + 12 = 0$
3. $5x^2 - \sqrt{x} = x^3$ **n'est pas une équation de second degré**.

Puisque la définition précédente stipule que toute équation de second degré peut être réécrite sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, il suffit donc de savoir comment résoudre ce type d'équations pour en déduire une méthode générale.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. Résolvons l'équation suivante, d'inconnue x, dans $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

D'après le théorème 2.3, cette équation est équivalente à :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \tag{2.2}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
Nous pouvons constater assez vite que les solutions de l'équation 2.2 vont dépendre du signe de Δ. On procède donc par disjonction des cas :

— **Si** $\Delta = 0$:
Dans ce cas, l'équation 2.2 devient :

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Et comme $a \neq 0$, ceci est équivalent à dire que :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Conclusion : Dans ce cas, l'équation 2.1 **admet une unique solution sur** $\mathbb{R}$:

$$x = -\frac{b}{2a} = \alpha$$

— **Si** $\Delta > 0$:
Dans ce cas, le nombre $\sqrt{\Delta}$ est bien définit. On peut alors que l'équation 2.2 est équivalente à :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}\right)^2\right] = 0$$

Soit (n'oubliez pas que $a \neq 0$) :

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

Conclusion : Dans ce cas, l'équation 2.1 **admet deux solutions sur** $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad et \qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

— **Si** $\Delta < 0$:
Dans ce cas, Δ n'admet pas de racine carrée. L'équation 2.2 est équivalente à :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Or cette dernière équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$. En effet, $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ alors que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$. L'égalité est donc impossible sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : Dans ce cas, l'équation 2.1 **n'admet aucune solution sur** $\mathbb{R}$

Cette démonstration nous permet donc d'affirmer que les solutions de l'équation 2.1 dépendant uniquement du signe du nombre $\Delta = b^2-4ac$. Vous remarquerez que ce nombre est complètement construit par la donnée des trois coefficients du polynôme de second degré associé à l'équation.

Définition 2.4: Le discriminant Δ

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
On appelle **discriminant de l'équation** $ax^2+bx+c=0$, le nombre :

$$\Delta = b^2-4ac$$

Théorème 2.4

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
On note (E) l'équation : $ax^2+bx+c=0$.

— Si $\Delta < 0$: L'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
— Si $\Delta = 0$: L'équation (E) admet pour solution unique dans $\mathbb{R}$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
— Si $\Delta > 0$: L'équation (E) admet deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple 2.5

1. Solutions de l'équation : $2x^2 + 5x + 1 = 0$.
   Il s'agit d'une équation de second degré avec : $a = 2; b = 5$ et $c = 1$. Ainsi : $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 1 = 17$. On est donc dans le cas : $\Delta > 0$. L'équation deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}$:
   $$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$$
   L'ensemble des solutions de l'équation noté $\mathcal{S}$ est :
   $$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$
2. Solutions de l'équation $10x^2 - x + 1 = 0$.
   Il s'agit d'une équation de second degré avec : $a = 10; b = -1$ et $c = 1$. Ainsi : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 10 \times 1 = -39$. On est donc dans le cas : $\Delta < 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est : $\mathcal{S} = \emptyset$
3. Il n'est pas toujours nécessaire de passer par **la méthode de calcul du discriminant** Δ. Par exemple, pour résoudre $x^2 + 2x - 3 = 0$, il suffit de remarque le début de l'identité remarquable puis de la compléter : $(x + 1)^2 - 2^2 = 0$. Vous êtes invités à finir les calculs en utilisant vos connaissances de 2nde.
4. Il est également possible de retrouver la solution à une équation du second degré en s'inspirant du cas général, mais ce n'est pas très commode car assez long. Voici un exemple :
   $$\begin{aligned} 2x^2 - 8x - 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - 8x + 8 - 8 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x^2 - 4x + 4) - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x-2)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x - 2 = \sqrt{\frac{9}{2}} \quad ou \quad x - 2 = -\sqrt{\frac{9}{2}} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{9}{2}} + 2 \quad ou \quad x = -\sqrt{\frac{9}{2}} + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad x = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$
   Donc :
   $$\mathcal{S} = \left\{ \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}; \frac{4 + 3\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Définition 2.5: Racines d'un polynôme de second degré

Soit f un polynôme de second degré.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue x sont appelées **racines du polynôme** f. Trois cas sont possibles pour un polynôme f quelconque :

— f n'admet aucune racine sur $\mathbb{R}$.
— f admet une seule racine sur $\mathbb{R}$ qu'on appelle **une racine double**.
— f admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2.6

Les calcul de l'exemple 2.5 permettent d'affirmer que le polynôme f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{4}; \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{4}$$

La méthode de résolution utilisant le discriminant se prête bien à un usage informatisé. Ainsi, vous pouvez facilement programmer un logiciel de résolution sur Python en utilisant le code suivant par exemple :

```
def equaDegr2(a, b, c):
    import math
    descr = b**2 - 4*a*c
    if descr < 0:
        return "Cette équation n'a pas de solution dans R"
    elif descr == 0:
        x = -b/(2*a)
        return x
    else:
        x1 = (-b - math.sqrt(descr))/(2*a)
        x2 = (-b + math.sqrt(descr)) / (2 * a)
        return (x1, x2)
```

2.6 Factorisation et application à l'étude de signe-résolution des inéquations

Théorème 2.5

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.Le polynôme de second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ se factorise éventuellement comme suit :

— Si $\Delta < 0$: il n'y a pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double de f.

— Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes de f.

Démonstration.
La démonstration de ces résultats découle directement des formes factorisées exhibées dans la démonstration du théorème 2.5. □

Une fois les factorisations établies. Il est très facile d'utiliser vos connaissances de 2de sur les tableaux de signes afin de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.6

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de second degré avec $a, b, c \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$.Alors :

— Si $\Delta < 0$: Alors $f(x)$ a le même signe que a.

— Si $\Delta = 0$: Alors $f(x)$ admet une racine double x_0. Le polynôme s'annule pour $x = x_0$ et prend le signe de a pour tout $x \neq x_0$.

— Si $\Delta > 0$: Alors $f(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 (On suppose que $x_1 < x_2$).Ainsi :

1. Il s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$.
2. Il prend le signe de a pour tout $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.
3. Il prend le signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$.

Le théorème ci-dessus peut également être exprimé entièrement avec des tableaux de signes :

— Si $\Delta < 0$: :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	signe de a

— Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

— Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Ces résultats permettent également de résoudre les inéquations du type : $ax^2 + bx + c \leq 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$...

Exemple 2.7

Résolution de l'inéquation $2x^2 + 5x + 1 \geq 0$.
Nous avons déjà calculé les racines du polynôme $f(x) = 2x^2+5x+1$ dans l'exemple 2.5. On peut alors dresser le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-5-\sqrt{17}}{4}$		$\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right[$$

Le tableau de signe que nous avons dressé, nous permet également de donner l'ensemble des solutions de l'inéquation :

$$2x^2 + 5x + 1 \geq 0$$

2.7 Représentation et interprétation graphiques

Tous les résultats que nous avons démontré dans les paragraphes précédents nous permettent de faire une synthèse sur les représentations graphiques possibles d'un polynôme du second degré :

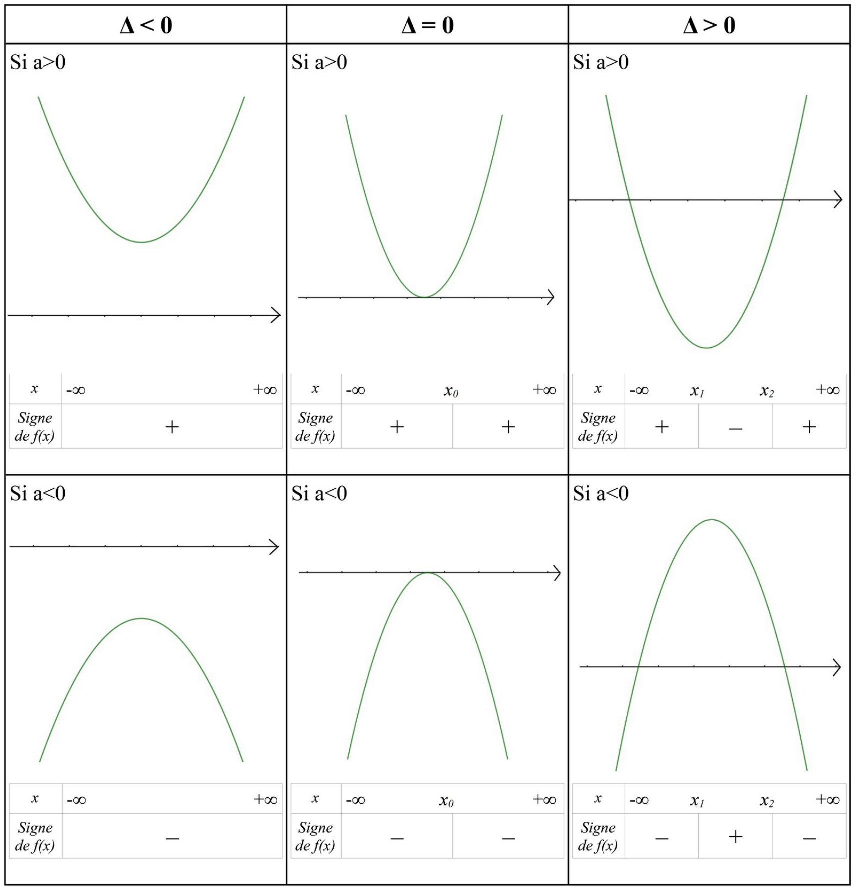


Figure 3 : Tableau des représentations graphiques possibles