Cours de mathématiques

Première Spécialité

RACHID GUEJDAD

RGUEJDAD@ACMATHEMATICA.COM

HTTPS://RGUEJDAD.COM

Deuxième edition

Contents

LOGIQUE, RAISONNEMENTS ET ALGORITHMIQUE

1. Bases de la logique et raisonnements

1.1 Introduction

Qui dit mathématiques, dit aussi **logique et raisonnement**. Mais il faut savoir que ces deux notions n'ont pas, en mathématiques, la même définition lexicale que vous avez l'habitude de leur associer. Ils veulent dire des choses bien plus précises que de simples synonymes de bon sens ou encore de réflexion.Commençons par en donner les définitions:

1. **La logique mathématique:** est une discipline des mathématiques qui a pour objet son étude en tant que **langage**. Ses fondamentaux les plus importants ont été posé à la fin du 19ème siècle. Elle est née suite à **la crise des fondements** qui c'est déclenchée suite à l'apparition de paradoxes mathématiques à cause de la complexification des notions abordées. Pour faire simple, c'est la partie des mathématiques qui s'occupe de définir ce que c'est qu'une **vérité mathématique** ainsi que de poser les définitions et interactions basiques: axiome, théorème, implication...(Elle est pour les mathématiques ce que la grammaire est pour le français)
2. **Raisonnement mathématique:** C'est tout processus d'étapes claires et liées entre des idées qui permet de faire la démonstration d'une vérité à partir d'un autre résultat prédéfini en avance et qui remonte un lien continu jusqu'à un axiome. On dit dans ce cas que nous avons établi **une preuve ou une démonstration** de ce résultat.

Il faut savoir que ce qui précède n'a pas toujours été prédéfini comme ça. C'est grâce aux travaux d'une succession de mathématiciens que nous en sommes arrivé là aujourd'hui. Ces définitions sont dites faisant partie **des mathématiques modernes**.

Ce chapitre à pour but de vous initier au **langage mathématique** et à sa symbolique qui remplacera au fur et à mesure le langage "courant" dans vos rédaction. C'est aussi une petite introduction à ce qu'on appelle **le formalisme mathématique**.

1.2 Vocabulaire mathématique de base

Avant d'introduire de nouvelles notions, commerçons par rappeler un peu de vocabulaire que vous ne connaissez peut être pas !

Définition 1.2.1

1. **Une démonstration:** En mathématiques, une démonstration d'un résultat est un agencement rigoureux des étapes d'un raisonnement qui mène à la conclusion du résultat à partir de conditions préalables(appelées hypothèses), selon des principes logiques.
2. **Un théorème:** est un résultat mathématique qui admet une démonstration.
3. **Une proposition:** est considéré comme synonyme de théorème, mais souvent utilisée pour désigner des résultats moins importants.
4. **Une propriété:** est un résultat mathématique qui découle en général de la façon dont est définit une notion et qui en décrit les spécificités.
5. **Un axiome:** Un résultat qui est universellement reconnu comme étant vrai, mais sans admettre de démonstration.

la notion mathématique que vous connaissez le moins parmi les cinq ci-dessus est probablement **l'axiome**. En voici donc quelques exemples célèbres:

- **L'axiome de l'existence d'un ensemble vide**: qui permet de poser l'existence de l'ensemble vide dans la théorie des ensembles (de Zermelo-Fraenkel 20ème siècle)
- **Les postulats d'Euclide(300 Av. J-C)**: Dans son célèbre traité **les éléments**, Euclide fait la liste de cinq axiomes grâce auxquels il démontre tous ses résultats de géométrie plane que vous avez fait au collège:
  – Il existe toujours une droite qui passe par deux points du plan.
  – Tout segment peut être étendu suivant sa direction en une droite (infinie).
  – A partir d'un segment, il existe un cercle dont le centre est un des points du segment et dont le rayon est la longueur du segment.
  – Tous les angles droits sont égaux entre eux.
  – Étant donné un point et une droite ne passant pas par ce point, il existe une seule droite passant par ce point et parallèle à la première.

Définition 1.2.2 — Assertion logique.
On appelle **assertion logique** (ou mathématique) toute proposition qui n'admet qu'une seule valeur logique (vraie ou fausse) dans le cadre d'une théorie précise. Une assertion est souvent noté par une lettre majuscule entre parenthèses (On utilise souvent (P) ou (Q)).

Une assertion peut être vraie dans une théorie mais pas dans une autre. Il faut donc toujours se référer au contexte ! En voici quelques exemples:

■ **Exemple 1.1**

- Au primaire, on vous a appris que (P): "$3-5$" est une assertion fausse (c'est impossible de soustraire 5 de 3 puisque le premier est plus grand !!). Aujourd'hui, vous savez tous que le résultat de cette opération est -2. Mais on ne vous a pas menti pour autant ! (P) est effectivement une assertion fausse en théorie des entiers, mais elle est vraie dans celle des relatifs.
- L'assertion $(Q): 1+1=0$ est fausse dans la théorie des entiers mais vraie en théorie modulaire sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- "Il pleuvra demain" **n'est pas une assertion**.
- "Il y a 24 heures dans une journée" **est une assertion**.

■

1.3 Connecteurs logiques

Définition 1.3.1 — Connecteur logique.
Un connecteur logique (ou opérateur logique) est un symbole ou un mot établissant une liaison précise entre deux propositions (ou assertions au sens définit précédemment). Il permet de construire une assertion composée.

(R) Vous avez déjà vu au moins deux connecteurs logiques en seconde : celui de la **conjonction** noté par "**et**" et celui de la disjonction noté par "**ou**".

Ci-joint maintenant de nouveaux opérateurs que vous ne connaissez peut-être pas encore. Ce sont ceux que nous utiliserons le plus cette année.

1.3.1 L'implication

Définition 1.3.2
Une **implication** est une connexion logique entre deux propositions (P) et (Q) que l'on note par $(P) \Rightarrow (Q)$. Elle exprime que **la proposition** (Q) **(conclusion) est vraie si** (P) **(l'hypothèse est vraie)**.

L'implication $(P) \Rightarrow (Q)$ est équivalente alors à l'une des tournures de phrases suivantes:
1. Si (P) alors (Q).
2. (P) entraîne/implique (Q)

■ **Exemple 1.2** La plupart des résultats mathématiques que vous avez fait jusqu'ici peuvent s'exprimer sous forme d'une implication. En voici quelques exemples:
- $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $x = 2 \Rightarrow x + 3 = 5$

■

Propriété 1.3.1 — Transitivité de l'implication.
L'implication est une connexion logique transitive. C'est à dire que si on a $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (T)$ alors $(P) \Rightarrow (T)$.

(Utilisation pratique en démonstrations)

L'implication est une connexion logique qui assure la validité d'un résultat du moment que les hypothèses sont valides en plus d'être transitive. On l'utilise donc souvent pour démontrer un résultat en partant d'hypothèse déjà acceptée comme vrai. En voici quelques exemples:

1. **Montrer que tout entier positif** n **vérifie l'inéquation** $n^2 + 1 \geq 2n$**.**
   Nous allons démontrer cette proposition en utilisant des implications successives en partant d'une vérité prédéfinie.
   Soit n un entier positif. On sait déjà qu'il est vrai que pour tout entier positif n nous avons $(n-1)^2 \geq 0$. Ainsi par processus d'implications successives on peut écrire:
$$\begin{aligned}(n-1)^2 \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad n^2 - 2n + 1 \geq 0\\ &\Rightarrow \quad n^2 + 1 \geq 2n\end{aligned}$$
   Une fois arrivé à la fin, on dit alors que nous avons démontré le résultat par implications successives.
   Attention: Il faut bien évidement que **vos transitions par implication soient toutes vraies!**
2. **Montrer que la somme de deux nombres entier successifs est toujours impaire**. (Je vous laisse le soin de faire cette démonstration pour vous entrainer)

1.3.2 Équivalence

Définition 1.3.3
On dit que deux propositions (P) et (Q) sont équivalentes si les deux implications $(P) \Rightarrow (Q)$ et $(Q) \Rightarrow (P)$ sont vérifiées. On note alors $(P) \Leftrightarrow (Q)$. On dit que (P) est vraie **si et seulement si** (Q) est vraie.
L'équivalence traduit une égalité logique. C'est à dire que les deux propositions sont vraie (ou fausse) simultanément.

La différence entre une équivalence et une simple implication est que la deuxième ne donne aucune information sur l'état de (P) lorsque (Q) est vraie (Pouvez-vous me dire pourquoi ?).
On considère l'implication suivante à titre d'exemple:

$$(P) : x > 0 \quad et \quad y > 0 \Rightarrow (Q) : xy > 0$$

Cette implication peut être interprétée de la façon suivante: Si (P) est vraie alors **forcement** (Q) l'est aussi. Sauf que si (Q) est vraie, on ne peut rien dire sur la valeur logique de (P).

■ **Exemple 1.3**
Beaucoup de théorèmes et de résultats que vous connaissez déjà sont des équivalences. Je vais en citer quelques-uns ici et je laisse à votre charge la formulation mathématique sous forme d'équivalences.

- Le théorème de Pythagore.
- Le théorème de Thalès (dit "de Thalès").

■

Propriété 1.3.2 — Transitivité et commutativité de l'équivalence.

1. Comme c'est le cas pour l'implication, l'équivalence est **transitive**. C'est à dire que si on se donne trois propositions $(P), (Q)$ et (T), alors nous avons le résultat suivant:
   Si $(P) \Leftrightarrow (Q)$ et $(Q) \Leftrightarrow (T)$ alors nous avons aussi $(P) \Leftrightarrow (T)$
2. L'équivalence est aussi **commutative**. C'est à dire que $(P) \Leftrightarrow (Q)$ et $(Q) \Leftrightarrow (P)$ veulent dire la même chose.

(Utilisation pratique en démonstrations)

L'équivalence est utilisée dans plusieurs procédés de démonstration que vous connaissez déjà. Nous allons en énumérer quelques uns:

1. **La résolution d'équations. Par exemple:** $5x+3=0$**.**
   Jusqu'ici, vous avez utilisé des mots tels que **implique, alors, donc...** pour faire le lien entre vos différentes étapes du raisonnement. Maintenant, vous pouvez tout simplement écrire:

$$\begin{aligned} 5x+3=0 &\Leftrightarrow 5x=-3 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-3}{5} \end{aligned}$$

   Et n'oubliez pas de rajouter à la fin une phrase de conclusion du type:
   L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\{\frac{-3}{5}\}$
2. **La preuve par équivalence successives ou par double sens d'implications.**
   Essayer de montre le résultat suivant pour y réfléchir en autonomie:
   Pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad n \quad pair \Leftrightarrow n^2 \quad pair$

1.4 Quantificateurs logiques

Les quantificateurs logiques sont des **symboles mathématiques** qui ont un sens très précis et qui aident à mieux formaliser les propositions et assertions mathématiques en les juxtaposant avec des prédicats. Mais je ne vais pas rentrer dans les détails de ce que c'est qu'un prédicat ici.

Définition 1.4.1

- **Le quantificateur existentiel $\exists$:** Il est utilisé pour symboliser l'existence **d'au moins un élément** dans un ensemble qui vérifie une proposition.
- **Le quantificateur existentiel unitaire $\exists!$:** Il est utilisé pour symboliser l'existence **d'exactement un seul et unique élément** dans un ensemble qui vérifie une proposition.
- **Le quantificateur universel $\forall$:** Il sert à indiquer que **tous les éléments d'un ensemble** vérifient une proposition.

■ **Exemple 1.4**
Voici quelques exemples et contre-exemples de l'utilisation de quantificateurs.

1. **Bonne utilisation des quantificateurs:**
   - $\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.
   - $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=0$.
2. **Mauvaises utilisations:**
   - $\forall x \in \mathbb{R}, x+1=0$.
   - $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
   - $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y=0$.

■

Pour finir, voici quelques informations complémentaires, mais très importantes :

1. Dans une expression du type $\forall x \in E, P(x)$, la proposition ne dépends pas d'un x en particulier. C'est ce qu'on appelle une **proposition avec une variable muette**.
2. Les quantificateurs sont toujours placés **avant** l'assertion mathématique qu'ils quantifient.
3. L'emploi des quantificateurs en guise d'abréviation au milieu d'une phrase en français est **totalement exclu et refusé**. Ils doivent figurer seulement dans une phrase mathématique formalisée.
4. L'ordre des quantificateurs est très important lorsqu'ils sont de natures différentes. **Changer l'ordre change automatiquement le sens !**

Vérifions maintenant le niveau de ta compréhension de toutes ces notions :

Exercice 1.1
Démontrer chacun des résultats suivants:

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x+\dfrac{1}{x} \geq 2$
- $\sqrt{2x+2}-\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.
- $a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b$

■

1.5 Les grands types de raisonnement

Ce paragraphe a pour objet d'énumérer les différents types de procédés de raisonnements que nous allons utiliser tout au long de l'année. On considère dans toute la suite du chapitre que (P) et (Q) désignent deux propositions quelconques.

1.5.1 Le raisonnement déductif

Définition 1.5.1
Le procédé d'un raisonnement déductif est le suivant:

$$\text{Quand } (P) \text{ est une proposition vraie et que } (P) \Rightarrow (Q) \text{ alors } (Q) \text{ est vraie.}$$

R Je ne m'attarde pas trop sur celui-ci puisqu'on en a déjà parlé auparavant. Voir le paragraphe sur l'implication (1.3.1).

1.5.2 Raisonnement par l'absurde

Définition 1.5.2
Le procédé du raisonnement par absurde est le suivant:
1. On suppose que la négation de (P) est vraie.
2. On montre qu'elle implique une proposition (Q) qui est **fausse**.

■ **Exemple 1.5**
CLASSIQUE: Montrons que $(P) : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Supposons par absurde que $(\overline{P}) : \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est vraie. On a donc:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad &\Rightarrow \quad \exists (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2; \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad et \quad pgcd(a,b) = 1 \\ &\Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \\ &\Rightarrow \quad 2b^2 = a^2 \end{aligned}$$

On arrive donc à la conclusion que a^2 est un nombre pair.
Lemme: (Démonstration à faire en exercice)

$$a^2 \text{ pair} \Rightarrow a \text{ pair}$$

En utilisant le lemme ci-dessus, on en déduit que a est pair, donc il peut s'écrire sous la forme $a = 2p$ avec p un entier naturel positif. Ainsi nous avons:

$$\begin{aligned} 2b^2 = (2p)^2 \quad &\Rightarrow \quad 2b^2 = 4p^2 \\ &\Rightarrow \quad b^2 = 2p^2 \end{aligned}$$

Cela veut dire que b^2 est pair et par conséquent b l'est aussi.
On arrive finalement à un résultat qui affirme que a et b sont tous les deux pairs, ce qui contredit $pgcd(a,b) = 1$.
Puisqu'on conclut par une contradiction, on en déduit donc que $(\overline{P})$ est fausse, et donc que $(P) : \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est vraie. ■

1.5.3 Raisonnement par disjonction de cas

Définition 1.5.3
On considère une proposition du type, $\forall x \in E, P(x)$. Avec E un ensemble sur lequel on veut montrer que $P(x)$ est vraie.
Un raisonnement **par disjonction de cas**, consiste à démontrer la propriété sur une partie A de E puis de le faire pour le reste des éléments qui n'appartiennent pas à A.

■ **Exemple 1.6**
Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, n^2 + 3n$ **est un nombre pair**.
Un nombre entier n peut être soit **pair** ou **impair**. On procède donc à démontrer que dans les deux cas, $n^2 + 3n$ est toujours pair:

- Si n est un nombre pair:

$$\begin{array}{rcl} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k & \Rightarrow & n^2 = 4k^2 \quad et \quad 3n = 6k \\ & \Rightarrow & n^2 + 3n = 4k^2 + 6k \\ & \Rightarrow & n^2 + 3n = 2(2k^2 + 3k) \end{array}$$

  Puisqu'on a réussi à écrire $n^2 + 3n$ sous la forme $2K$ avec $K = 2k^2 + 3k$ alors on a bien démontré que c'était un nombre pair.
- Si n est un nombre impair:

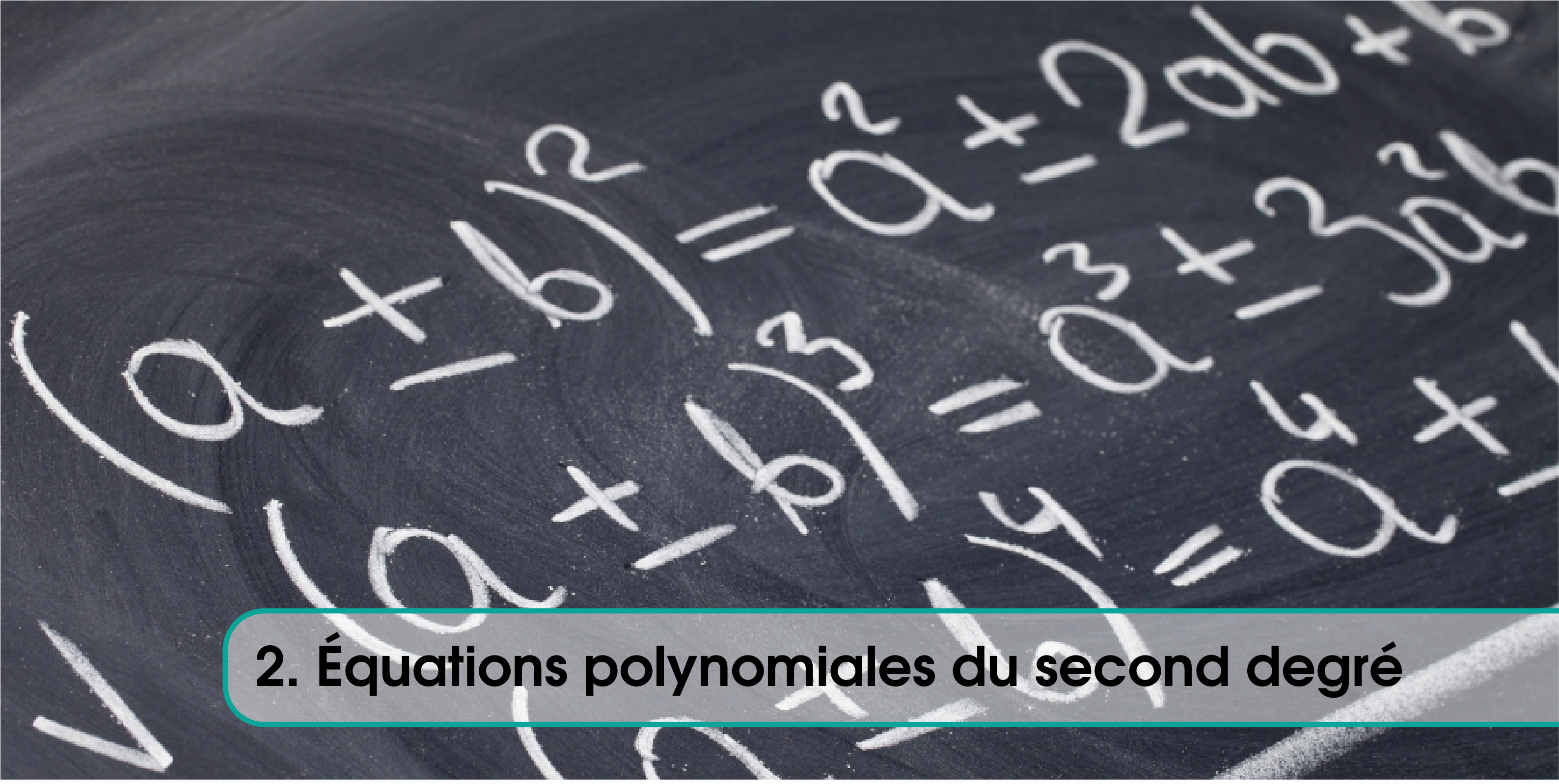
$$\begin{array}{rcl} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k+1 & \Rightarrow & n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \quad et \quad 3n = 6k + 3 \\ & \Rightarrow & n^2 + 3n = 4k^2 + 10k + 4 \\ & \Rightarrow & n^2 + 3n = 2(2k^2 + 5k + 2) \end{array}$$

  Puisqu'on a réussi à écrire $n^2 + 3n$ sous la forme $2K'$ avec $K' = 2k^2 + 5k + 2$ alors on a bien démontré que c'était un nombre pair.

On en conclut alors que $n^2 + 3n$ **est toujours pair** indépendamment des différents cas de figures. ■

II

ALGÈBRE



2. Équations polynomiales du second degré

2.1 Introduction

La résolution d'équations a été et est toujours aujourd'hui au coeur de la pratique des mathématiques. Non seulement elle est essentielle dans notre discipline en elle même, mais elle est surtout très utile dans les autres sciences dures. Modéliser un phénomène de la vie réelle en physique, chimie ou encore en science de la vie et de la terre nous mène toujours vers des expressions sous forme d'équations. Il ne faut donc pas être surpris de voir que les mathématiciens ont passé beaucoup de temps à élaborer des méthodes de plus en plus compliquées pour les résoudre.
Dans ce chapitre, nous allons principalement nous intéresser à des équations qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Avec:

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.
- x est une inconnue qui vérifie l'égalité.

Ce type d'équations s'appelle : **Une équations polynomiale du second degré à une seule variable**.
Les mathématiciens savent résoudre ce genre d'équations depuis le 9^{me} siècle. C'est en effet le mathématicien perse **Al Khawarizmi** (qui au passage à donné son nom aux algorithmes) qui a posé la méthode utilisée jusqu'à aujourd'hui.
Même si la contribution d'Al Khawarizmi est considérable dans le domaine de l'algèbre, il resta toute sa vie très déçu de ne pas avoir pu aller au-delà de la résolution des équations de second degré. Il était fasciné par l'idée de trouver une méthode qui pourrait permettre de résoudre n'importe quelle équation sous la forme $P(x) = 0$, loin de se douter que c'était en fait impossible.

Il faudra attendre sept siècles complets, avec tout autant de mathématiciens déçus, avant que les équations du troisième et quatrième degrés ne soient résolues par radicaux. On doit cet exploit à deux mathématiciens de la renaissance italienne: **Nicolo Fontana**, dit "**Tartaglia**" et **Girolamo Cardano**.

La dernière étape de cette aventure aura lieu entre **1799** et **1824** avec le théorème **d'Abel-Ruffini**, qui vient prouver qu'il n'y aucun moyen de résoudre, par radicaux, les équations algébriques dont le degré est supérieur à 5. Cela amena les mathématiciens à chercher des méthodes alternatives et mènera plus tard vers la mise en place de toute une théorie qui s'appelle la théorie de Galois. Mais c'est encore une autre histoire !

Un peu d'étymologie:

Le mot "**Polynôme"** provient des racines grecques **poly** et **nôme**.

- **nôme:** Du grec ancien **polus** qui peut être traduit par beaucoup ou plusieurs. C'est un préfixe utilisé pour signifier que le mot global est constitué de plusieurs éléments du type du mot qui le suit.
- **nôme:** vient du mot grec **onoma** signifiant nom ou terme.

2.2 Fonction polynomiale de second degré à une seule variable.

Avant de définir ce que c'est qu'une fonction polynomiale de second degré à une seule variable, commençons par définir ce que c'est qu'une fonction polynomiale.

Définition 2.2.1 — Polynôme de degré n.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On appelle **fonction polynomiale de degré** n, toute expression algébrique formée par des sommes et des produits de constantes et d'indéterminées.
Une fonction polynomiale à une seule variable notée $P(x)$ est toujours exprimée de la manière suivante:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots\dots + a_nx^n$$

Avec: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des constantes telles que $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ et x une variable.
La constante $n \in \mathbb{N}$ s'appelle **degré** du polynôme $P(x)$. C'est la plus grande puissance de la variable x présente dans l'expression de la fonction polynomiale.

R

1. Une fonction polynomiale de degré n sera appelée, par abus de langage, **Polynôme de degré** n.
2. Comme pour toute autre fonction, on peut calculer **l'image** $P(x)$ d'un **antécédent** réel x. Il est aussi intéressant de noter que toute fonction polynomiale admet $\mathbb{R}$ comme son domaine de définition.

■ Exemple 2.1

- $P(x) = 3x^2 + 5xy^3 + z^5$ est un polynôme de degré 5 à trois variables.
- $Q(x) = x^3 - \pi x + 9$ est un polynôme à une seule variable de degré 3.
- $T(x) = \sqrt{x} - x^2$ **n'est pas un polynôme**.
- Tous les nombres réels peuvent être considérés comme un polynôme de degré 0. Par exemple, le nombre 3 peut être considéré comme un polynôme et dans ce cas on écrit: $\forall x \in \mathbb{R}; P(x) = 3$.
- Les fonctions affines et linéaires sont des polynômes de degré 1. Par exemple, $F(x) = 2x + 5$ est un polynôme.

■

Définition 2.2.2 — fonction polynomiale du second degré (Polynôme de second degré).

On appelle **polynôme de second degré** ou encore **trinôme**, tout polynôme $P(x)$ qui associe au réel x une image de la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$. Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$.

Les réels a, b et c sont dits **coefficients** du trinôme $P(x)$.

■ **Exemple 2.2**
Voici des exemples de polynômes de second degré:

- $P_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$
- $P_2(x) = x^2$
- $P_3(x) = -x^2 + 1$
- $P_4(x) = \pi x^2 + 12x$

■

2.3 Comment résoudre une équation polynomiale de second degré ?

Maintenant que nous avons défini ce que c'est qu'un polynôme de second degré, nous allons nous intéresser à comment résoudre des équations du type $P(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Bien évidement, cela reviens à **trouver les antécédents** de α par le polynôme P.
Pour faire cela, nous allons essayer de transformer l'écriture de $P(x)$ de sa forme qu'on connait jusqu'à présent vers une forme plus compacte qui nous aidera dans la résolution. Cette forme s'appelle **la forme canonique** du polynôme $P(x)$.

2.3.1 Outils de résolution

Théorème 2.3.1 — Forme canonique.
Soit P un polynôme défini par: $P(x) = ax^2 + bx + c$. Avec, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq 0$.
Il existe deux réels α et β, tels que:

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Cette dernière écriture de $P(x)$ s'appelle sa **forme canonique**.

R On verra dans la démonstration de cette propriété que α et β peuvent s'écrire entièrement en fonction des coefficients du polynôme P de la façon suivante:

- $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$
- $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

■ **Exemple 2.3**

- La forme canonique du polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 2$ est: $(x - 1)^2 + 1$
- Le polynôme $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ admet comme forme canonique: $2(x - 1)^2 + 1$

■

Dans l'expression de β, le numérateur est ce qui importe le plus ! En effet, c'est cette quantité qui permettra **de déterminer les solutions de l'équation**. Vu son importance, on pose alors le définition suivante :

Définition 2.3.1 — Discriminant d'un polynôme de second degré.
Soit P un polynôme défini par: $P(x) = ax^2 + bx + c$ Avec, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq 0$.
On appelle **discriminant** de $P(x)$,noté Δ, le nombre réel:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Exemple 2.4
Je vais reprendre les deux polynômes de l'exemple précédent :

- Le discriminant de $P(x) = x^2 - 2x + 2$ est: $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4$
- Le discriminant de $Q(x) = 2x^2 - 4x + 3$ est: $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 16 - 24 = -8$

■

Avant de clôturer cette partie, faites l'exercice d'application suivant :

Exercice 2.1 Déterminer la forme canonique de chacune des fonctions polynomiales définies par les expressions suivantes :

1. $P(x) = x^2 + 6x + 9$
2. $Q(x) = 4x^2 - 16x - 5$
3. $H(x) = -3x^2 - 6x + 18$

■

2.3.2 Méthodologie de résolution

J'ai annoncé précédemment, notre souhait de résoudre des équations du type $P(x) = z$ avec $P(x)$ un polynôme et $z \in \mathbb{R}$. Sachez que lorsque $P(x)$ est un polynôme de second degré,on appelle ce genre d'équations **des équations algébriques de second degré** (ou équations de second degré pour faire simple).
Un réflex quasi-intuitif que tout mathématicien en herbe doit avoir quand il est confronté à ce genre d'équations (et pour bien d'autres choses!), c'est de se demander ce qui se passe lorsque $z = 0$?
Vous allez voir que savoir résoudre des équations de second degré du type $P(x) = 0$ est tout ce dont nous avons besoin pour résoudre n'importe quelle équation plus générale $P(x) = z$, même lorsque $z \neq 0$. La propriété suivante explique pourquoi.

Propriété 2.3.2
Soient $z \in \mathbb{R}$ et P un polynôme défini par: $P(x) = ax^2 + bx + c$ Avec, $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $a \neq 0$.
On pose:

$$Q(x) = P(x) - z$$

L'équation $P(x) = z$ a les mêmes solutions que l'équation $Q(x) = 0$. Dans un langage plus mathématique, on écrit: $P(x) = z \Leftrightarrow Q(x) = 0$.

Cette propriété est une astuce qui nous permet "d'éviter" de résoudre directement l'équation $P(x) = z$ en résolvant une équation équivalente et beaucoup plus facile qui est $Q(x) = 0$. Le théorème suivant résume la méthode de résolution d'une équation de second degré à forme simplifiée ($Q(x) = 0$).

Théorème 2.3.3 — Solutions d'une équation de second degré.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de second degré avec $a, b, c \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
On a alors:

- Si $\Delta < 0$: L'équation algébrique $P(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$: L'équation admet pour solution unique dans $\mathbb{R}$, $\alpha = -\frac{b}{2a}$ qu'on appelle **racine double du polynôme P**.
- Si $\Delta > 0$: L'équation admet pour solution dans $\mathbb{R}$, le couple (α_1, α_2) avec:

$$\alpha_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad \alpha_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

α_1 et α_2 sont dites **racines du polynôme P** et elles sont distinctes.

R Δ est positif dès que a et c ont des signes opposés.

■ **Exemple 2.5**

Pour résoudre l'équation $2x^2-8x-1=0$ dans $\mathbb{R}$, on peut procéder des deux façons suivantes:

- **En utilisant la forme canonique:**
  Afin de retrouver la forme canonique d'un polynôme, on procède en complétant une identité remarquable de la façon suivante:

$$
\begin{aligned}
2x^2-8x-1=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2-8x+8-8-1=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2(x^2-4x+4)-9=0\\
&\Leftrightarrow \quad 2(x-2)^2-9=0\\
&\Leftrightarrow \quad (x-2)^2=\frac{9}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad x-2=\sqrt{\frac{9}{2}} \quad ou \quad x-2=-\sqrt{\frac{9}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad x=\sqrt{\frac{9}{2}}+2 \quad ou \quad x=-\sqrt{\frac{9}{2}}+2\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{4+3\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad x=\frac{4-3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

- **En utilisant le discriminant:**
  On commence par calculer Δ:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac\\
&= 6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

  Ainsi, d'après le théorème précédent on peut directement poser les deux solutions de l'équation (car $\Delta>0$):

$$\alpha_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \quad \alpha_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  En remplaçant b,Δ et a par leur valeurs respectives, vous retrouvez exactement les mêmes résultats que dans la première méthode.

■

R Comme vous avez sûrement du le remarquer, on peut s'en sortir et résoudre une équation de second degré sans avoir recours aux résultats du théorème 2.3.3. Mais cela est plus fastidieux. Voyons si vous avez tout compris, essayez de résoudre les équations dans l'exercice suivant :

Exercice 2.2 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :
- $2x^2-8x=-9$
- $x^2-x+1=0$
- $3x^2-10=13x$

■

2.4 Qu'en est-il des inéquations ?

A ce stade du cours, vous vous posez peut-être la question suivante :

*Que se passe-t-il si on remplace le signe $=$ par $\leq,\geq$? Autrement dit, et si on avait affaire à une **inéquation** du second degré au lieu d'une équation ?*

Ce questionnement est tout à fait légitime quand on prends en considération vos connaissances issues de l'année dernière. Après tout, vous savez déjà comment déterminer le signe d'une expression de la forme : $(ax+b)(cx+d)$ et par conséquent résoudre une inéquation du type : $(ax+b)(cx+d) \leq 0$ via des tableaux de signes.
Pour l'instant, vous savez écrire un polynôme de second degré $P(x)$ sous deux forme :

1. **Une forme développée** : $P(x) = ax^2 + bx + c$
2. **Une forme canonique** : $P(x) = a(a-\alpha)^2 + \beta$

Malheureusement, aucune de ces formes ne permet d'étudier le signe de $P(x)$ pour la simple et bonne raison que **ce n'est pas des formes factorisées**. Il faut donc trouver un moyen **de factoriser** $P(x)$. C'est ce que permet le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 — Factorisation d'un polynôme de 2nd degré.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de second degré avec $a,b,c \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.Alors:

- Si $\Delta < 0$: Alors $P(x)$ n'admet pas de factorisation.
- Si $\Delta = 0$: Alors $P(x)$ se factorise sous la forme $a(x-\alpha)^2$. (α étant la solution double de $P(x=0)$)
- Si $\Delta > 0$: Alors $P(x)$ admet la factorisation suivante : $P(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$. (Avec α_1 et α_2 solutions de $P(x) = 0$)

Une fois que nous avons réussi à factoriser $P(x)$, trouver son signe (et ainsi résoudre les équations du type $P(x) \leq 0$ ou $P(x) \geq 0$) devient beaucoup plus facile :

Propriété 2.4.2 — Signe d'un polynôme de second degré.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de second degré avec $a,b,c \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$.Alors:

- Si $\Delta < 0$: Alors $P(x)$ a le même signe que a.
- Si $\Delta = 0$: Alors $P(x)$ admet une racine double x_0. Le polynôme s'annule pour $x = x_0$ et prend le signe de a pour tout $x \neq x_0$.
- Si $\Delta > 0$: Alors $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 (On suppose que $x_1 < x_2$). $P(x)$ se comporte alors de la façon suivante:
  1. Il s'annule pour $x = x_1$ et $x = x_2$.
  2. Il prend le signe de a pour tout $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$.
  3. Il prend le signe de $-a$ sur $]x_1, x_2[$.

R Pour se rappeler des différents cas plus facilement, nous pouvons aussi les représenter sous forme de tableaux de signes :

- Si $\Delta < 0$: :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

■ **Exemple 2.6**
Le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par: $P(x) = x^2 + x + 1$ est toujours positif. En effet, il suffit pour déduire cela de calculer Δ. On a bien:
- $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.
- $a = 1 > 0$.

Ainsi, $P(x)$ admet le même signe que $a = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc: $\forall x \in \mathbb{R}; \quad P(x) > 0$. ■

Exercice 2.3 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :
- $2x^2 - 8x \leq -9$
- $x^2 - x + 1 > 0$
- $3x^2 - 10 < 13x$

■

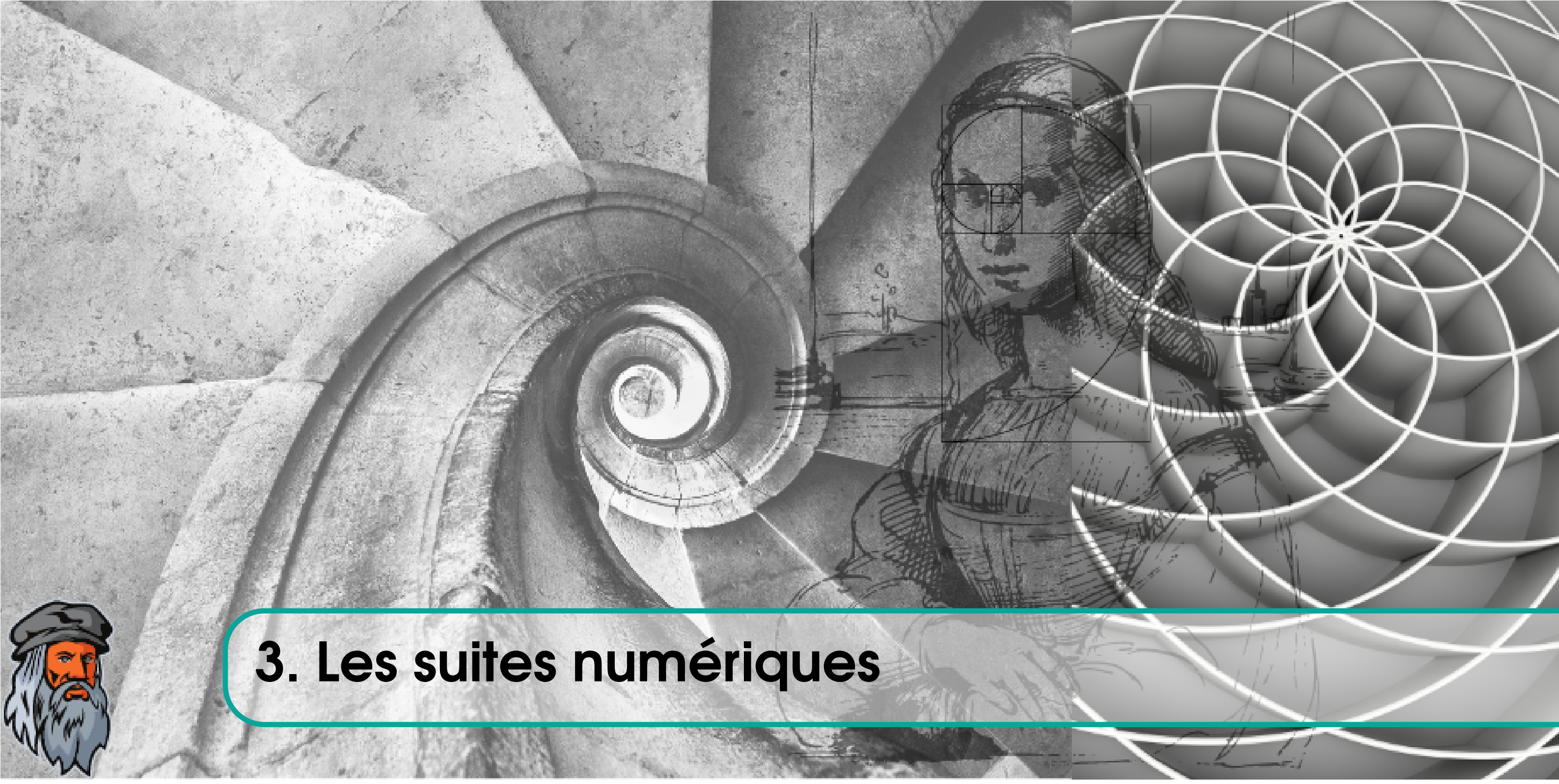
2.5 Représentation graphique d'un polynôme de second degré

Vous avez vu en cours de mathématiques de l'année dernière, que la fonction carrée (définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$) a une représentation graphique $\mathscr{C}_f$ qui prend la forme d'une parabole. Il en est de même pour un polynôme de second degré...à quelques détails près.
Vous savez aussi, que la parabole de la fonction carrée admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées et qu'elle admet l'origine du repère comme minimum. Ces deux caractéristiques changent dans le cas d'un polynôme de second degré qui est plus général.

Théorème 2.5.1 — Représentation graphique d'un polynôme de second degré.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de second degré avec $a, b, c \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$ et dont la forme canonique s'écrit: $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha)$.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la représentation graphique de $P(x)$, notée $\mathscr{C}_P$ est **une parabole** de sommet $S(\alpha; \beta)$ et dont l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = \alpha$.

R

1. Une interprétation purement géométrique du théorème précédent est de dire: que C_p n'est rien d'autre que **l'image par translation** de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$ de la représentation graphique $\mathscr{C}_{P_0}$ de la fonction carrée.
2. **L'orientation de la parabole** dépends entièrement du signe de a:
   - Si $a > 0$, alors $\mathscr{C}_p$ est orientée vers le haut. De plus,β est un **minimum** de P atteint en α.
   - Si $a < 0$, alors $\mathscr{C}_p$ est orientée vers le bas. De plus, β est un **maximum** de P atteint en α.
3. **Les points d'intersection** de $\mathscr{C}_p$ avec l'axe des abscisses, sont les points dont l'abscisse est solution de l'équation $P(x) = 0$.



3. Les suites numériques

3.1 Introduction

En l'année **1202** et en pleine dynamique amenée par la renaissance en Europe, fut publié un livre intitulé **"Liber Abaci"** par un mathématicien italien connu sous le nom de **Léonard de Pise** ou encore sous son alias : **Fibonnaci**. Léonard proposa dans ce livre, comme exemple à son étude de la dynamique des populations, un modèle mathématique qui décrit la situation qu'il énonce comme ceci:

> "Chaque couple de lapins, dès son troisième mois d'existence, engendre chaque mois un nouveau couple de lapins, et ce indéfiniment." **Fibonacci, Liber Abaci.**

Il va ensuite avancer que c'est une situation mathématique qui peut être traduite par une fonction, dont l'espace de départ est $\mathbb{N}$, et que se définie formellement (avec les écritures mathématiques modernes) de la manière suivante:

$$(\mathscr{F}_n): \quad \begin{cases} \mathscr{F}_0 = 1; \quad \mathscr{F}_1 = 1; \\ \forall n \geq 2; \quad \mathscr{F}_{n+2} = \mathscr{F}_{n+1} + \mathscr{F}_n \end{cases}$$

Cette séquence mathématique deviendra par la suite, l'exemple le plus célèbre de ce que c'est qu'**une suite numérique**.
L'objectif de ce chapitre est de vous apprendre à manipuler ce nouveau type de fonctions. Puisqu'en effet, vous n'avez jusqu'ici, eu affaire à d'autres fonctions en dehors des **fonctions réelles**.

Sachez aussi que la suite numérique est l'un des outils les plus puissants et les plus utilisés en mathématiques. On retrouve des traces de son utilisation très tôt dans l'histoire de l'humanité. Presque toutes les premières civilisations ont eu recours à une suite à un moment ou un autre: Les grecs, les égyptiens, babyloniens...Bien évidement, aucune de celles-ci n'avais recours à cette notion avec le formalisme précis et très rigoureux que nous utilisions aujourd'hui. Mais cela n'a pas empêché des mathématiciens comme **Acharia Pingala (Inde, 450-200 Av.J.C)**, **Archimède(Grèce, vers 220 Av.J.C)** ou encore **Héron d'Alexandrie (Égypte, premier siècle Apr.J.C)** d'établir des résultats très intéressants !

3.2 Premières notions

Commençons par définir ce que c'est qu'une suite. En réalité, il y a plusieurs façon de le faire. La plus intuitive est de considérer qu'une suite n'est rien d'autre **qu'une succession ou séquence de nombres entiers**. Cette façon de définir les choses, bien qu'étant la plus élémentaire, n'est pas vraiment la plus adaptée à une étude formelle. Nous allons donc plutôt opter pour la définition suivante :

Définition 3.2.1 — Suite numérique.
On appelle **Une suite numérique à valeurs réelles** ou plus simplement **une suite**, toute fonction $\mathscr{U}$ définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Autrement dit, est considérée comme suite toute fonction exprimée de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{U}: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \mathscr{U}(n) \end{array}$$

R Afin de simplifier la manipulation des suites numériques (que nous allons appeler dorénavant "**suite**" pour faire court) voici quelques notations à prendre en compte :

1. Pour différencier les suites des fonctions plus générales, elles seront notées de la manière suivante : $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (U_n), U désigne le nom de la suite, n la variable, et la notation $n \in \mathbb{N}$ indique que la variable peut prendre n'importe quelle valeur de $\mathbb{N}$. On peut substituer cette dernière par $n \geq 0$ qui veut dire la même chose.
2. Comme une fonction, l'image d'un entier n par la suite (U_n) peut être notée $U(n)$. Mais puisque cela veut aussi dire "le nombre qui se trouve dans l'emplacement n", on préfère utiliser la notation simplifiée U_n (sans les parenthèses).
3. Il y a des suites qui ne peuvent pas être totalement définies sur $\mathbb{N}$, Elles ne le sont qu'à partir d'un nombre entier n_0 qu'on appelle "**rang de définition**". On note alors la suite de la manière suivante: $(U_n)_{n\geq n_0}$

■ **Exemple 3.1**
La suite dont le terme général est donné par: $u_n = \dfrac{1}{n}$ est une suite qui n'est pas définie pour $n = 0$.
On la note alors par: $(u_n)_{n\geq 1}$ ■

Une suite peut être introduite de plusieurs façons, dans ce cours, nous allons nous intéresser principalement à deux d'entre elles :

- La définition d'une suite terme général.
- La définition d'une suite par récurrence.

Commençons par expliciter les deux notions :

Définition 3.2.2 — Suite définie par terme général.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que la suite (u_n) est définie par terme général sur $\mathbb{N}$ lorsqu'elle peut s'écrire:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = f(n)$$

■ **Exemple 3.2**

1. Les suites ci-dessous, sont définies par terme général:
   - $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 3n - 2.$
   - $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = (-1)^{n-\sqrt{n}}.$
   - $\forall n \in \mathbb{N}; \quad w_n = \dfrac{1}{n^2+3}.$

2. La suite suivante, n'est pas du tout définie par terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 3u_{n-1} + 3$$

■

Définition 3.2.3 — Suite définie par récurrence.
Soit (u_n) une suite numérique.
La suite (u_n) est dite **définie par récurrence** lorsqu'elle est identifiée par: **son premier terme** et **Une relation de récurrence liant deux termes successifs**.
Autrement dit, lorsqu'elle est présentée sous la forme:

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

Avec: $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.

■ **Exemple 3.3**
La suite (u_n) de terme général $u_n = 2^n$ peut être définie par récurrence de la façon suivante:

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 \times u_n \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

■

Voici un exercice pour vous familiariser avec la notion d'une suite ainsi que les manipulations algébriques de base qui leur sont associés :

Exercice 3.1

1. Soit la suite (a_n) définit par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad a_n = 5n - 4$. Calculer a_1, a_5 et a_{100}.
2. Soit (b_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad b_n = 3n^2 - 33n + 72$. Comparez b_3 et b_8.
3. Soit (k_n) la suite définie par: $k_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}; \quad k_{n+1} = 5k_n - 7$. Calculer k_1 et k_3.
4. Donner une définition par terme général de chacune des suites suivantes:
   - La suite (u_n) des nombres paires.
   - La suite (v_n) des nombres impaires.
   - La suite (w_n) des carrés parfaits.
5. Soit (u_n) la suite définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = n^2 + 1$.
   - Calculer u_k pour $k \in \{0; 1; 2; 3\}$
   - Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement ces quatre premiers termes de la suite (u_n).
   - Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 50$.

■

3.3 Suites arithmétiques

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'une suite peut être générée de deux façons principalement : Par terme général ou bien par récurrence. En étudiant d'un peu plus près le procédé de génération des termes, on se rends compte qu'on peut classifier les suites en différentes catégories selon leur comportement algébrique:

1. Des suites dites arithmétiques, que nous allons voir dans ce paragraphe.
2. Des suites dites géométriques, que nous allons voir dans le paragraphe suivant.
3. Des suites qui ne sont dans aucune des deux catégories ci-dessus.

Ce qui nous pousse à faire cette distinction est **un problème de transfert**. Je m'explique : Le format le plus simple pour manipuler une suite est le loin **la définition par terme général**. Se pose alors la question : Y a-t-il un moyen facile de la retrouver ? Surtout lorsqu'une suite nous vient définie par récurrence ?
Il se trouve, justement, que les deux catégories de suites énumérées juste avant permettent un passage lisse d'une écriture par récurrence vers une autre par terme général.
Attention: En dehors de ces deux types de suites, le passage n'est pas toujours évident !

Définition 3.3.1 — Suite arithmétique.
Une suite est dite **arithmétique**, lorsqu'il y a un écart fixe entre tous les termes de celle-ci. Autrement dit, la suite (u_n) est arithmétique, si et seulement si il existe un nombre réel r tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r s'appelle **la raison** de la suite (u_n). c'est une constante de la suite arithmétique.

■ **Exemple 3.4**

1. La suite (u_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 5n+3$ est une suite arithmétique de raison 5. En effet, on peut remarquer que:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= 5(n+1)+3 \\ &= 5n+5+3 \\ &= (5n+3)+5 \\ &= u_n+5 \end{aligned}$$

2. La suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = n^2+1$ n'est pas arithmétique.
En effet, il suffit de calculer les trois premiers termes pour remarquer que l'écart entre eux n'est pas constant:

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 2 \quad ; \quad u_2 = 5$$

Ainsi on a :

$$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$$

■

R Montrer qu'une suite est arithmétique ou qu'elle ne l'est pas sont deux approchent totalement différentes. Pour réfuter un résultat (montrer qu'elle n'est pas arithmétique), il suffit de donner un contre exemple comme dans le point 2. de l'exemple précédent.
Mais pour **prouver une vérité universelle sur** $\mathbb{N}$ (la suite est arithmétique), alors dans ce cas il faut le faire de manière générale et abstraite et non pour des cas particuliers. (Voir le point 1. de l'exemple ci-dessus).

Propriété 3.3.1 — Propriétés d'une suite arithmétique.
Voici les caractéristiques propres à une suite arithmétique donnée (u_n) de raison r:

1. La relation entre deux termes quelconques u_m et u_p (avec $p \leq m$) de la suite est donnée par la formule suivante :

$$u_m = u_p + (m-p).r$$

2. Pour calculer la somme de termes successifs d'une suite $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_m$

qu'on peut aussi noter

$$\sum_{k=p}^{m} u_k$$

On utilise la formule suivante:

$$\sum_{k=p}^{m} u_k = \frac{u_p + u_m}{2} \times (m - p + 1)$$

3. La somme des m premiers termes de la suite $u_0 + u_1 + u_3 + \ldots + u_m$ est un cas particulier de celui d'avant avec $p = 0$. Ainsi,on peut trouver facilement que:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \sum_{k=0}^{m} u_k = \frac{u_0 + u_m}{2} \times (m + 1)$$

■ **Exemple 3.5**

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = 10$. Alors :
   - Pour calculer u_5, il suffit de faire:

   $$u_5 = u_0 + (5 - 0) \times r = 10 + 5 \times 3 = 25$$

   - La somme $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$ est donnée par:

   $$S = \sum_{k=2}^{100} u_k = \frac{u_2 + u_{100}}{2} \times (100 - 2 + 1)$$

   Je vous laisse finir le calcul.
2. On considère une suite **arithmétique** (v_n) telle que: $v_4 = 15$ et $v_{20} = -120$.
   Déterminer la raison r de la suite (v_n).

■

Théorème 3.3.2 — Comment retrouver le terme général d'une suite arithmétique ?. Soit (u_n) une suite **arithmétique** de raison r et de premier terme u_0.
Son terme général u_n est donné par:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = u_0 + nr$$

R Ce dernier résultat est juste un cas particulier du point 1 de la propriété précédente. Mais qu'il est celui nous utilisons le plus pour retrouver le terme général d'une suite arithmétique, il est celui que nous mettons souvent en avant.

■ **Exemple 3.6**

1. La suite arithmétique de raison π et de premier terme 2 a pour terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 2 + n\pi$$

2. La suite (v_n) donnée par le terme général $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n =_1 +3n$ est arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $v_0 = 1$.

■

Exercice 3.2
Soit (a_n) une suite arithmétique de raison -2 telle que $a_0 = 7$.
1. Exprimer a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Dans repère orthonormé, représenter graphiquement, les quatre premiers termes de (u_n)

3.4 Suites géométriques

Définition 3.4.1 — Suite géométrique.
Une suite est dite **géométrique**, si et seulement si il existe un nombre réel non nul q tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q \times u_n$$

Le nombre q s'appelle **la raison** de la suite (u_n). C'est une constante de la suite géométrique.

Exemple 3.7

1. La suite (u_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 2 \times 5^n$ est une suite géométrique de raison 5. En effet, on peut remarquer que:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= 2 \times 5^{n+1} \\ &= 2 \times (5^n \times 5) \\ &= (2 \times 5^n) \times 5 \\ &= u_n \times 5 \end{aligned}$$

2. La suite (v_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad v_n = n^2$ n'est pas géométrique.
En effet, il suffit de calculer les trois premiers termes pour remarquer que la suite n'est pas géométrique: (Car le rapport entre des termes consécutifs ne sera pas constant !)

$$u_1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 4 \quad ; \quad u_3 = 9$$

Ainsi on a :

$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$$

Propriété 3.4.1 — Propriétés d'une suite géométrique.
Voici les caractéristiques propres à une suite géométrique donnée (u_n) de raison q:
1. La relation entre deux termes quelconques u_m et u_p (avec $p \leq m$) de la suite est donnée par la formule suivante :
$$u_m = u_p \times q^{m-p}$$
2. Pour calculer la somme de termes successifs d'une suite $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_m$ qu'on peut aussi noter
$$\sum_{k=p}^{m} u_k$$
On utilise la formule suivante:
$$\sum_{k=p}^{m} u_k = u_p . \frac{1 - q^{m-p+1}}{1 - q}$$
La somme des m premiers termes de la suite $u_0 + u_1 + u_3 + ... + u_m$ est un cas particulier

de celui d'avant avec $p = 0$. Ainsi,on peut trouver facilement que:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_m = \sum_{k=0}^{m} u_k = u_0.\frac{1-q^{m+1}}{1-q}$$

■ **Exemple 3.8**

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_2 = 10$. Alors :
   - Pour calculer u_5, il suffit de faire:

   $$u_5 = u_2 \times q^{(5-2)} = 10 \times 3^3 = 270$$

   - La somme $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_{100}$ est donnée par:

   $$S = \sum_{k=2}^{100} u_k = u_2 \times \frac{1-3^{100+1-2}}{1-3}$$

   Je vous laisse finir le calcul.
2. On considère une suite **géométrique** (v_n) telle que: $v_4 = 10$ et $v_{20} = 40$. Déterminer la raison q de la suite (v_n).

■

Théorème 3.4.2 — Comment retrouver le terme général d'une suite géométrique ?. Soit (u_n) une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0.
Son terme général u_n est donné par:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = u_0 \times q^n$$

■ **Exemple 3.9**

1. La suite géométrique de raison π et de premier terme 2 a pour terme général:

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_n = 2 \times \pi^n$$

2. La suite (v_n) donnée par le terme général $\forall n \in \mathbb{N}; \quad v_n = 2^{n+1}$ est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = 2$

■

Exercice 3.3
Soit (k_n) une suite géométrique de raison négative telle que : $k_4 = 2040$ et $k_6 = 510$.
1. Calculer sa raison q.
2. Exprimer k_n en fonction de n.
3. Calculer k_9.

■

3.5 Comportement d'une suite numérique.

Lorsqu'on parle du comportement d'une suite, nous voulons dire par cela deux choses :
- **Les variations de la suite :** Qui permettent de comparer les termes les uns aux autres (est-ce qu'ils croient,décroient...).
- **Le comportement asymptotique:** Qui permet de mieux appréhender l'évolution de la suite face aux très grands nombres. Est-ce qu'elle va atteindre une limite, ne sera jamais bornée...

3.5.1 Variation d'une suite numérique.

Puisqu'une suite n'est rien d'autre qu'un cas particulier d'une fonction, il est assez normal qu'elle hérite des propriétés générales de cette dernière. Elle peut donc être **croissante ou décroissante**.C'est presque la même chose...à quelques détails près !

Définition 3.5.1 — Variation d'une suite numérique.
Soit (u_n) une suite numérique. On dit que:

1. La suite (u_n) est **croissante** sur $\mathbb{N}$ si et seulement si:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n.$$
2. La suite (u_n) est **décroissante** sur $\mathbb{N}$ si et seulement si:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$
3. La suite (u_n) est **constante** sur $\mathbb{N}$ si et seulement si:
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n.$$

■ **Exemple 3.10**

1. La suite (u_n) définie par: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = n^2$ est une **suite croissante**. En effet, on a:
$$u_{n+1} = (n+1)^2; \quad u_n = n^2$$
Or nous avons, $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}; \quad u_{n+1} > u_n$.
2. Utiliser un raisonnement similaire pour démontrer que la suite (v_n) définie par:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad v_n = \frac{1}{n}$$
est une suite décroissante.

■

R

1. ATTENTION:
Une suite (u_n) peut **changer de sens de variation** soit de manière ordonnée soit d'une manière chaotique !
Un exemple classique d'une telle suite est la suite définie par :
$$\forall \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$$
Les termes de cette suite sont 1 et -1 de manière alternée suivant la parité de n. Elle n'est **ni croissante, ni décroissante ni constante sur** $\mathbb{N}$
2. Une suite qui garde la même variation sur la totalité de $\mathbb{N}$ est dite: **suite monotone**.
3. Une suite peut varier de manière très aléatoire sur plusieurs termes, puis garder une même variation à partir d'un rang n_p. On dit alors que cette suite est monotone (croissante ou décroissante) à partir du rang n_p.

Exercice 3.4
Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$, par :
$$t_n = 1 - \frac{2}{n+3}$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_{n+1} - t_n = \dfrac{2}{(n+3)(n+4)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (t_n) sur $\mathbb{N}$.

3.5.2 Introduction intuitive du comportement asymptotique.

Les situations réelles modélisées avec des suites viennent souvent avec des questions concernant les limites possibles du modèle. Pour mieux comprendre ce qu'on veux dire par cela, essayons de voir une situation pratique:

Exemple 3.11 — Une situation de ricochets.
Imaginons qu'on est à coté d'un lac et qu'on décide de s'entraîner à faire des ricochets.
On considère qu'après avoir lancé un caillou, il ricoche pour la première fois après avoir parcouru **2 mètres** et qu'à partir de là, il va parcourir à chaque fois, avant de ricocher à nouveau, la moitié de la distance qu'il avait parcouru entre les deux précédents ricochets.
Afin de modéliser cette situation, on peut considérer une suite notée (u_n) de telle façon que:
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n$ corresponde à la distance parcouru entre le $(n-1)$-ème et le n-ème ricochets.
Ainsi, on obtient que:

- $u_1 = 2$
- $u_2 = \dfrac{1}{2} \times u_1 = 1$

  $\vdots$
- $u_n = \dfrac{1}{2} \times u_{n-1}$

  $\vdots$

A partir de cette explication, on peut en déduire que cette suite est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = 2$. Son terme général s'écrit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad u_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

On se pose alors la question suivante:

Quelle est la distance maximale que le caillou peut atteindre avant de couler au fond du lac ?

Afin de résoudre cette problématique, je vous invite à répondre aux questions intermédiaires suivantes:

1. Donner, en fonction de n, l'expression de $D(n) = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
2. Que représente cette quantité ?
3. Implémenter la fonction D dans votre calculatrice et observer le tableau des images de D.
4. Quelle est la valeur D_{max} sur laquelle se stabilisent les images par D dès que n est assez grand ? (dès que $n > 16$).

Cette valeur D_{max} est ce qu'on appelle **La limite de la suite** (u_n). C'est à dire que c'est la valeur que u_n cherche à approcher de plus en plus quand en fait grandir la valeur de n de plus en plus (On dit qu' **on fait converger n vers l'infini positif** et on écrit $n \longrightarrow +\infty$).
Important: Cette façon définir la limite n'est pas très rigoureuse et ne peux pas être considérée que comme une introduction très intuitive au sujet. Vous allez étudier le sujet avec la rigueur qui lui est due l'année prochaine. ■

Définition 3.5.2 — Limite finie d'une suite numérique.
Soient (u_n) une suite et l un nombre réel.
On dit que (u_n) a pour limite réelle l ou que (u_n) **converge vers** l si les termes u_n se rapprochent de plus en plus vers l lorsque n tend vers $+\infty$ (ou encore n converge vers $+\infty$). On note alors:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$$

R La convergence d'une suite ou sa divergence (le contraire de converger) est ce qu'on qualifie de **comportement asymptotique d'une suite**.

III PROBABILITÉS ET VARIABLES ALÉATOIRES

4. Probabilités conditionnelles

4.1 Introduction

Le développement des probabilités, en tant qu'une branche des mathématiques, est un sujet très épineux et compliqué à aborder lorsqu'on s'intéresse à son évolution chronologique. En effet, cette discipline, qui n'est considérée comme étant des mathématiques à part entière que depuis très peu (à l'échelle de l'évolution des mathématiques tout au long de l'existence humaine), a posée beaucoup de problèmes à la communauté mathématique.
Bien que quelques applications de calculs probabilistes aient été développé depuis le moyen âge, une vraie théorie (formalisée) des probabilités ne verra le jour qu'à partir du **17ème** siècle. l'enclenchement de la théorie va se faire par une correspondance écrite entre ***Blaise Pascal*** et ***Pierre de Fermat*** autour du célèbre **problème des parties**. Suite à cela, et pendant deux siècles entiers, la théorie va commencer à se préciser de plus en plus.
Les mathématiciens qui se sont penchés sur le sujet étaient confrontés à une difficulté double:

- **Un problème purement philosophique:** On avait beaucoup de mal à accepter le fait d'associer une science au hasard et à l'incertitude. Le philosophe **Auguste Compte** par exemple, l'a toujours désigné comme étant ***une prétendue science des probabilités***. On peut aussi citer **Joseph Bertrand** qui écrit en l'an **1900**:

  > *"Comment oser parler des lois du hasard ? Le hasard n'est-il pas l'antithèse de toute loi ?"*
  > [1]

- **Un problème d'axiomatique et de définition:** Les spécialistes ont eu beaucoup de mal à définir rigoureusement la notion d'une probabilité. Il a fallut attendre 1933 pour qu'une vraie théorie mathématique des probabilités voit le jour (Avec toutes les conditions d'une théorie mathématique rigoureuse, notamment une base axiomatique). C'est le mathématicien russe ***Andreï Kolmogorov*** qui va poser les trois axiomes qui définissent correctement une probabilité en tant que mesure ı (comprendre fonction pour l'instant) vérifiant les propriétés suivantes:

[1] Pierre Kahane, le mouvement Brownien Société mathématique de France.

1. $\forall A \subset \Omega; \mathbb{P}(A) \in [0;1]$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. Pour toute famille d'événements $\{A_1; \cdots; A_n\}$ deux à deux disjoints, nous avons :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Malgré les efforts et les travaux de Kolmogorov, la théorie ne fait pas tout de suite consensus, mais elle commence à être globalement acceptée vers la fin des années 50 (Le groupe Bourbaki ne la reconnait toujours pas pendant les années 60 !).

4.2 Rappels de seconde

Définition 4.2.1 — Expérience aléatoire.
Une expérience aléatoire est une expérience qui peut conduire à plusieurs **issues**. Une seule issue se réalise sans que l'on puisse la prévoir à l'avance.
C'est donc toute expérience dont l'issue dépend du hasard.

■ Exemple 4.1

1. L'expérience qui consiste à lancer un dé est une expérience aléatoire.
2. Jouer à Pile ou Face est une expérience aléatoire.

■

Définition 4.2.2 — Univers, issues et événements.
Soit $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire.
On appelle :

1. **Une issue de $\mathscr{E}$:** un des résultats possible par l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$.
2. **Un événement de $\mathscr{E}$:** un ensemble contenant plusieurs issues de $\mathscr{E}$.
3. **L'univers de $\mathscr{E}$:** L'ensemble qui contient toutes les issues possibles de $\mathscr{E}$. On le note souvent Ω.

■ Exemple 4.2
On considère $\mathscr{E}$, l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces numérotés de 1 à 6.Alors :

1. Les issues possibles de $\mathscr{E}$ sont : $\{1\};\{2\};\{3\};\{4\};\{5\};\{6\}$. Vu la lourdeur de l'écriture, nous pouvons écrire les issues ici sans accolades. **Toutefois, il faut garder en tête que c'est des ensembles. On ne peut donc pas les traiter comme des nombres (additionner, soustraire...n'est pas possible)**.
2. L'univers de $\mathscr{E}$ est donc : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$
3. L'événement "Avoir un nombre paire" peut être écrit sous forme de l'ensemble suivant : $A = \{2;4;6\}$.

■

R

- L'univers Ω et l'ensemble vide (noté $\emptyset$, qui veut dire l'événement, "il ne se passe rien") sont des évènements de l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$.
- Vu que les événements sont des ensembles, les opérations de base pour les manipuler sont celles de la théorie des ensembles (intersection, union...). Voir vos cours de seconde pour réviser cette partie.

Définition 4.2.3 — Loi de probabilité d'une expérience aléatoire.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire et $\Omega := \{i_1; i_2; \cdots; i_n\}$ son univers.
On appelle une loi de probabilité (ou probabilité par abus de langage) sur Ω toute fonction $\mathbb{P} : \Omega \longrightarrow [0;1]$ vérifiant :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(i_k) = 1$$

■ **Exemple 4.3**
Soit $\mathscr{E}$ l'expérience aléatoire qui consiste à tirer à pile ou face avec une pièce truquée de façon à ce qu'on ait deux fois plus de chance d'avoir pile que face.
L'univers de cette expérience est $\Omega = \{P; F\}$ avec P l'évènement "Avoir Pile" et F l'événement "Avoir Face".
La fonction $\mathbb{P} : \Omega \longrightarrow [0;1]$ définie par: $\mathbb{P}(P) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(F) = \frac{1}{3}$ est une loi de probabilité sur Ω qui décrit la situation de l'exemple. Vous pouvez facilement vérifier que c'est bien une probabilité. ■

(R) On dit **qu'on a modélisé une expérience aléatoire**, si on lui associe une loi de probabilité.

Propriété 4.2.1 — Propriétés algébriques d'une loi de probabilité.
Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur un univers Ω. Alros :
1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\forall A \subset \Omega; \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
3. $\forall A; B \subset \Omega; \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
4. $\forall A \subset \Omega; \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Avec $\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Exercice 4.1 En utilisant la propriété 3. et vos connaissances de l'année dernière, montrer la propriété 4. ci-dessus.

Exercice 4.2 A la suite d'une étude statistique dans un grand magasin, on a noté les résultats suivants concernant la demande quotidienne de téléviseurs.

Demande quotidienne	0	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0.05	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.05

Table 4.1: Probabilités de la demande quotidienne sur les téléviseurs.

1. Vérifier que ce tableau représente bien une loi de probabilité.
2. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
   - A : "Un jour donné, la demande est strictement inférieur à 4"
   - B : "Un jour donné, la demande est au moins égale à 2 "
3. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup B$.
4. En déduire la probabilité de l'événement $A \cap B$.

Définition 4.2.4 — équiprobabilité.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire, $\Omega := \{i_1; i_2; \cdots; i_n\}$ son univers et $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω.
On dit que $\mathscr{E}$ est **une expérience aléatoire équiprobable**, si tous les événements ont la même probabilité de se réaliser. Autrement dit : $\mathbb{P}(i_1) = \mathbb{P}(i_2) = \mathbb{P}(i_3) = \cdots = \mathbb{P}(i_n)$.

Proposition 4.2.2

En restant dans les même conditions de la définition précédente, on a :

$$\forall k \in \{1;\cdots;n\}; \qquad \mathbb{P}(i_k) = \frac{1}{n}$$

Définition 4.2.5 — Cardinal d'un ensemble.
Soit A un ensemble fini.
On appelle **Cardinal de** A, et on note $Card(A)$, l'entier positif qui correspond au nombre d'éléments de A.

■ Exemple 4.4

1. $Card(\emptyset) = 0$.
2. Si $A = \{x;y;z;t\}$ alors $Card(A) = 4$.

■

Proposition 4.2.3 — Probabilité d'un événement dans une situation d'équiprobabilité.
Soient $\mathscr{E}$ une expérience aléatoire **équiprobable**, $\Omega := \{i_1;i_2;\cdots;i_n\}$ son univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω.
Si A est un événement de $\mathscr{E}$ ($A \subset \Omega$) alors:

$$\mathbb{P}(A) := \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

■ Exemple 4.5
Une urne contient 2 boules rouges, 3 boules noirs et une boule blanche indiscernables au touché.
On se propose de tirer au hasard une boule de cette urne.
L'univers de cette expérience est donc :

$$\Omega = \{R_1;R_2;N_1;N_2;N_3;B\}$$

On se propose de calculer la probabilité de l'événement R : "Tirer une boule rouge".
Cette expérience est une situation d'équiprobabilité, ainsi, on peut écrire :

$$\mathbb{P}(R) = \frac{Card(R)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

■

4.3 Probabilités conditionnelles

Jusqu'ici, vous avez vu comment modéliser une situation probabiliste simple dans laquelle il n'y a qu'une seule expérience aléatoire à la fois. Vous savez par exemple modéliser une situation d'un lancé de dé, de pièce de monnaie ou encore de tirage d'une carte au hasard dans un jeu.
Mais qu'en est-il des situations un peu plus complexes ? Et si au lieu de lancer un dé une seule fois, on s'intéressait au résultats obtenus en lançant deux fois ? Voir plusieurs fois de suite ? Pour illustrer la complexité de traitement de ce type de raisonnements avec vos connaissances actuelles (et donc motiver les nouvelles notions que vous allez apprendre dans ce chapitre) commençant par traiter un cas pratique :

■ Exemple 4.6
On Lance un dé à 4 faces (Oui ça existe !) deux fois de suites et on note les deux résultats obtenus sous forme de couple $(x;y)$. On pose :

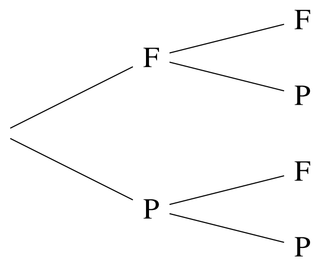
- $\mathscr{L}_1$ l'expérience aléatoire qui consiste à lancer le dé la première fois et Ω_1 son univers".

- $\mathscr{L}_2$ l'expérience aléatoire qui consiste à lancer le dé la première fois et Ω_2 son univers".
- $\mathscr{L}$ l'expérience aléatoire totale et Ω son univers.

1. Donner explicitement les ensembles Ω_1 et Ω_2.
2. Combien y a-t-il d'issues possible pour l'expérience $\mathscr{L}$?
3. Donner explicitement les issues possibles pour $\mathscr{L}$.
4. Calculer la probabilité de l'événement X : "Le premier chiffre du couple $(x;y)$ est égale à 3.
5. Calculer la probabilité de l'événement Y : "Le deuxième chiffre du couple $(x;y)$ est inférieur strictement à 3.
6. Que remarquez-vous ? Cette méthodologie est-elle utilisable si nous augmentons le nombre d'expériences ou le nombre d'issues pour chaque expérience (en utilisant un dé avec plus de faces par exemple).

■

Pour gérer ce type de situations composées par la succession de plusieurs expériences aléatoires, vous avez vu-l'année dernière- la notion **d'un arbre de probabilité**. Ainsi, à titre d'exemple, l'arbre de probabilité d'une situation de tirage à pile ou face deux fois de suite est le suivant :



La première colonne représente le premier tirage et la deuxième colonne le dernier. Chaque branche de l'arbre représente une seule issue possible de l'expérience composée (Avoir P puis F par exemple).
Pour travailler les probabilités de ce type de situations avec un peu plus de rigueur, on se rend compte très vite que les notions que vous connaissez jusqu'ici ne sont pas suffisantes. C'est pour cela qu'on introduit la définition suivante :

Définition 4.3.1 — Probabilité conditionnelle.
Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
On appelle **La probabilité conditionnelle de B sachant** A, la probabilité que l'événement B se réalise lorsqu'on sait déjà (avec certitude) que l'événement A c'est déjà réalisé. Cette probabilité, notée $\mathbb{P}_A(B)$ est donnée par :

$$\mathbb{P}_A(B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

R $\mathbb{P}_A(B)$ se lit également : "la probabilité de B sachant A".

■ **Exemple 4.7**
On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On note :

- A : "La couleur de la carte tirée est rouge". (La moité des cartes sont rouges)
- B : "La carte tirée est un valet" (Le jeu contient 4 valets; deux rouges et deux noirs)

1. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Dessiner un arbre de probabilité qui illustre la situation.
3. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit rouge sachant que c'est un valet ?
4. Quelle est la probabilité que la carte tirée soit un valet sachant qu'elle est rouge ?

■

Propriété 4.3.1 — Propriétés algébriques d'une probabilité conditionnelle.
Soient A et B deux événements d'un univers Ω tels que $A \neq \emptyset$. Alors :
1. $\mathbb{P}_A(B) \in [0;1]$
2. $\mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(\mathbb{A})$
3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)$ (Principe multiplicatif)

4.4 Théorème des probabilités totales

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment retrouver les probabilités conditionnelles à partir des probabilités totales (probabilité normale que vous connaissez depuis le collège). Mais qu'en est-il du procédé inverse ? Comment peut-on retrouver la probabilité totale $P(B)$ d'un événement B lorsqu'on connaît déjà les probabilités conditionnelles de celui-ci?
La réponse à ces questions est donnée par un théorème qu'on appelle: **Le théorème des probabilités totales**.

Définition 4.4.1 — Partition d'un ensemble.
soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un ensemble quelconque et $A_1;A_2;\cdots;A_n$ des sous-ensembles de E.
On dit que les sous-ensembles$A_1;\cdots;A_n$ forment une partition de E si :
- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$
- $\forall i,j \in \{1;2;\cdots;n\}; \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (On dit que les sous-ensembles sont deux à deux disjoints).

■ **Exemple 4.8**
On considère l'expérience aléatoire $\mathscr{E}$ qui consiste à lancer un dé non truqué à 6 face.
Vérifier que les deux événement suivants constituent une partition de Ω l'univers de $\mathscr{E}$:

- A: "Avoir un nombre pair"
- B: "Avoir un nombre impair"

■

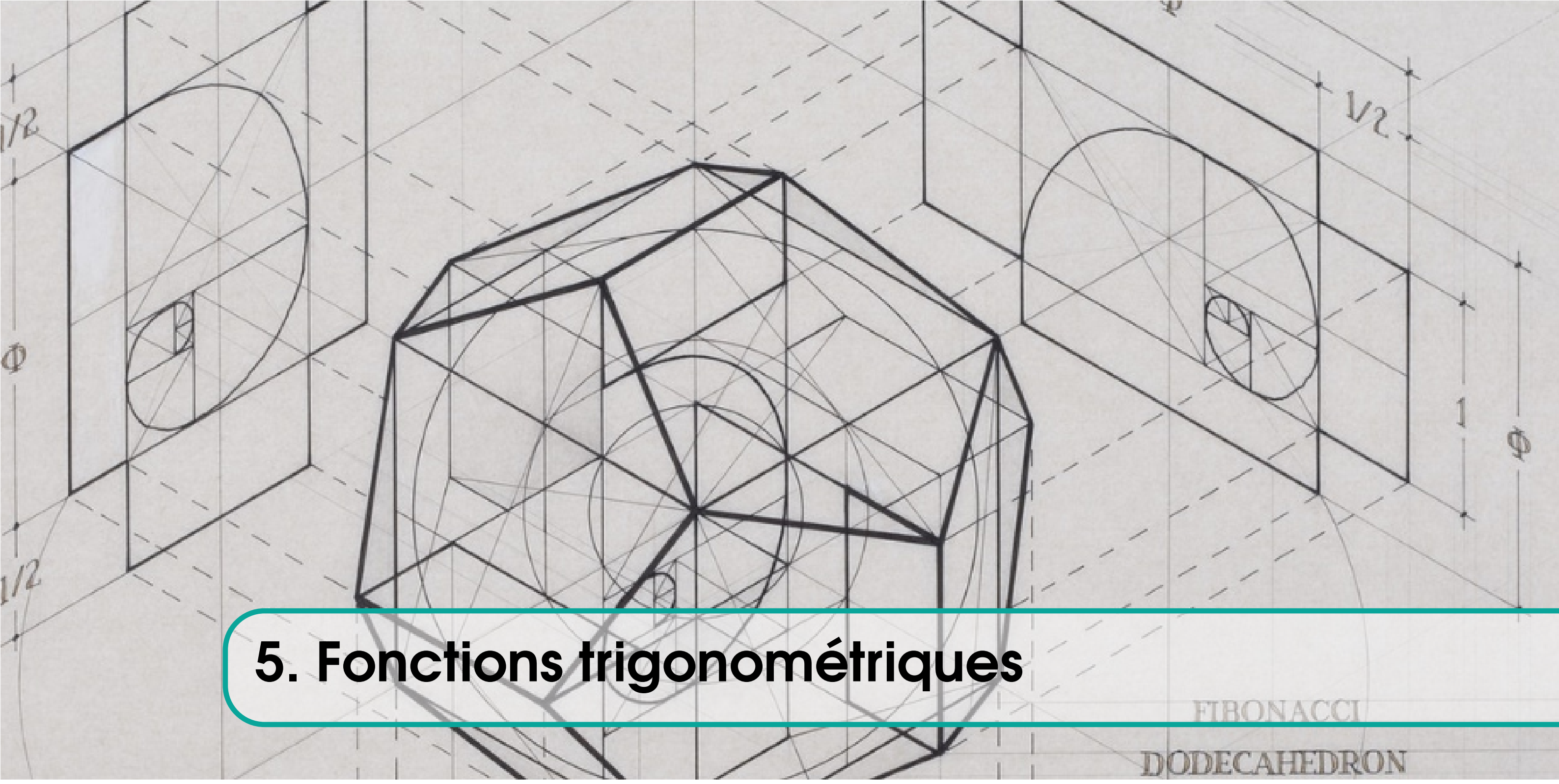
R Deux événements complémentaires forment toujours une partition de l'univers.

Théorème 4.4.1 — Théorème des probabilités totales (Admis).
soient $n \in \mathbb{N}^*$, Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $A_1;A_2;\cdots;A_n$ des événements de Ω.
Si $A_1;A_2;\cdots;A_n$, forment une partition de Ω alors :

$$\forall B \subset \Omega; \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B) \times P(A_k)$$

IV

GÉOMÉTRIE



5. Fonctions trigonométriques

5.1 Introduction

La géométrie est de loin l'une des disciplines mathématiques les plus anciennes, puisque son développement a commencé dès l'antiquité. Les grecs, qui sont considéré comme les fondateurs de la discipline, l'ont beaucoup utilisé dans leur vie courante. Il est effectivement assez simple de comprendre l'utilité de la géométrie, dès que l'on commence à réfléchir à édifier et à construire. C'est pour cette raison que les première traces de sa pratique remontent à **3000 Av.J-c**: Les civilisations égyptienne, Hindou et Babylonienne ont toutes laissés derrière elles, des édifices qui témoignent d'un usage extensifs de la géométrie bien avant la Grèce antique.

Mais qu'est ce que la géométrie au juste ? La réponse à cette question est complexe: Ce que l'on considère comme **faire de la géométrie** a beaucoup changé depuis les débuts de la discipline. Essayons d'y voir un peu plus clair en remettant les choses dans leur contexte historique:

- **La géométrie classique :** Les grecs faisaient, dans leur pratique des mathématiques, entre deux branches principales: l'arithmétique (l'étude des nombres) et la géométrie. Cette dernière détiens son nom du mot grec **gémetron** (gé pour terre et metron pour mesure). Faire de la géométrie, durant l'antiquité, faisait référence à l'étude des relations spatiales des objets tangibles. Puisque c'était une discipline que se pratiquait uniquement avec une règle, un compas et un usage très réduit du nombre elle contrastait avec l'arithmétique qui était une pratique lourdement calculatoire.
- **Naissance de la géométrie analytique:** L'une des plus grandes oeuvres de Descartes. En réponse à la complexité grandissante des problèmes géométriques traités, Descartes propose de faire basculer l'étude et la résolution des problèmes de la géométrie des dessins vers le calcul. Délaissant la règle et le compas au profit d'une nouvelle façon de manipuler les nombres : **L'algèbre**. Cette révolution a permis d'effacer les frontières entre algèbre et géométrie, d'ouvrir de nouvelles perspectives et de généraliser des concepts géométriques à des dimensions qui était, jusqu'à ce moment là, insoupçonnées.

En classe de 2nde, vous avez étudié comment Descartes a réussi, en introduisant l'idée du repère, à

transférer toute la théorie de géométrie plane (et dans l'espace) vers une forme de calcul algébrique très facile à exécuter. La géométrie cartésienne nous permet maintenant de résoudre des problèmes tels que ceux liés aux parallélismes, aux intersections ou encore aux surfaces de manière plus méthodique et moins fastidieuse que ce qui était d'usage jusqu'ici en géométrie plane grecque.
La clé de ce changement majeur n'est rien d'autre que la notion de **vecteur**. C'est grâce à elle qu'on peut exprimer tout le reste. Néanmoins, il reste encore une composante indispensable à la géométrie du plan que vous n'avez pas abordé: **Les angles et leurs mesures.**
Vu le succès de la géométrie cartésienne, il est très légitime de nous demander **s'il y a un moyen d'exprimer des angles en fonction de vecteurs ? s'il y a un lien entre le calcul algébrique et la notion d'angle ?**

5.2 Le cercle trigonométrique, l'enroulement de la droite sur le cercle

5.2.1 Cercle trigonométrique et limites de la mesure en degré

Définition 5.2.1 — Cercle trigonométrique.
On appelle **cercle trigonométrique** tout cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 sur lequel on a désigné comme étant **sens de rotation positif (ou direct)**, le sens inverse des aiguilles d'une montre.

■ **Exemple 5.1**

■

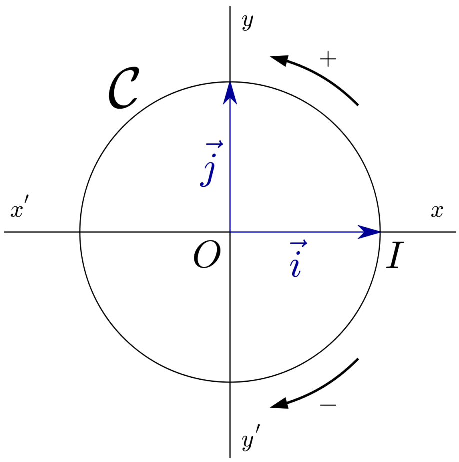


Figure 5.1: Exemple d'un cercle trigonométrique centré à l'origine d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

En considérant cette configuration, **dans laquelle le sens de rotation est pertinent**, on se rends très vite compte des limitations du système de mesure classique (en degrés). Pour s'en apercevoir, essayez de faire l'exercice suivant:

Exercice 5.1 Placer un point M sur le cercle $\mathscr{C}$ (figure 2.1) de façon à ce que l'angle $\widehat{MOI}$ soit égal à 45 degrés.

Il y a deux candidats potentiels comme réponse à cette question selon **le sens de rotation**. C'est pour cela que les mathématiciens ont décidé d'élaborer un nouveau système de mesure d'angles qui **prend en compte le sens de rotation en plus de la mesure algébrique de l'angle**.

5.2.2 L'enroulement de la droite sur le cercle et la mesure en radian

Afin de prendre en compte le sens de rotation dans un cercle trigonométrique, on essaye de faire l'analogie avec une droite réelle (qui est orientée). Cela nous emmène à enrouler la droite sur le cercle et ainsi définir une nouvelle unité de mesure des angles: **Le radian**. Cette échelle de mesure fait référence à la distance du point M du cercle par rapport à l'origine de la droite réelle lorsqu'on enroule cette dernière autour du cercle.

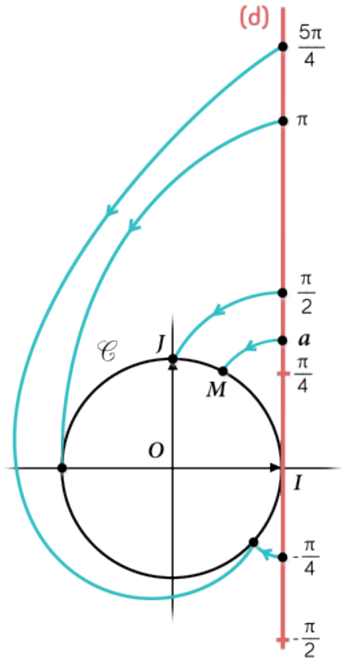


Figure 5.2: Exemple d'enroulement d'un cercle trigonométrique sur une droite orientée

Puisque le rayon du cercle trigonométrique est égal à 1, sa circonférence est égale à $P = 2\pi$. Ainsi, faire un tour complet du cercle dans le sens positif correspond à parcourir une distance de 2π sur la droite (d). On dit alors que l'angle de mesure 360 dans le sens positif est 2π radian.

De la même façon, on peut alors déterminer les mesures en radian de tous les angles de référence que vous connaissez déjà :

Exercice 5.2 — Proportionnalité entre les mesures en degré et en radian.
Compléter le tableau des mesures en radian, des angles usuels exprimés en degré ci-dessous :

Mesure d'un angle en degré	0	15	30	45	60	90	180	360
Sa mesure en radian							π	2π

Dans la littérature mathématique, écrire les mesures en radian se fait sans indiquer le mot **"radian"**. Ainsi, on écrit par exemple: **"L'angle plat est de mesure π"** au lieu d'écrire **"L'angle plat est de mesure π radian"**.

Mais il y a un problème ! Nous avons dit que la mesure en radian correspond à la distance entre l'origine de la droite réelle est le point qui correspond à M sur celle-ci. Sauf que **ce point correspondant sur la droite n'est pas du tout unique**. On se retrouve alors avec **une infinité de**

mesures pour le même angle.

■ **Exemple 5.2**
L'angle plat admet pour mesure π. Mais aussi: 3π; 5π; 7π...et tout autre nombre qui peut s'écrire sous la forme: $\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. ■

toutes ces remarques et idées nous permettent d'aboutir à la proposition suivante à propos des mesures en radian :

Proposition 5.2.1 — Propriétés du système de mesure en radian.
Soient $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé et $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique centré en O tel que l'origine des angles est le point $I(1;0)$ (voir Figure 2.1).
On considère un point $M(x,y) \in \mathscr{C}$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. L'angle géométrique $\widehat{IOM}$ possède un nombre infini de mesures en radian.
2. Toutes les mesures en radian de l'angle $\widehat{IOM}$ sont des nombres réels exprimés sous la forme $\theta = q.\pi$ avec $q \in \mathbb{Q}$.
3. Si θ et θ' sont deux mesures du même angle géométrique $\widehat{IOM}$, alors la différence entre les deux est un multiple de 2π. Autrement dit :
$$\exists k \in \mathbb{Z}; \quad \theta - \theta' = 2k\pi$$
Dans ce cas, on dit que θ et θ' sont **des mesures associées**.
4. Si θ est une mesure en radian de $\widehat{IOM}$, alors l'ensemble de toutes les mesures en radian de cet angle est donné par :
$$\{\theta + 2k\pi \quad | \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 5.3
On représente dans les dessins suivants, les neufs premiers polygones réguliers inscrits dans un cercle trigonométrique.

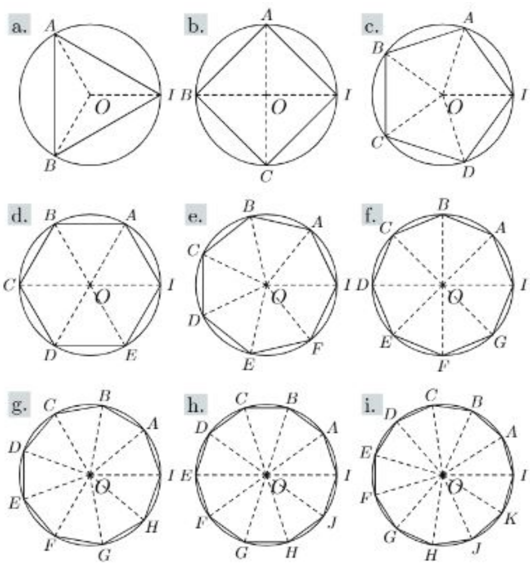


Figure 5.3: Polygones réguliers inscrits dans un cercle trigonométrique

1. Donner, dans chacun des cas ci-dessus, des mesures en radian des angles de type $\widehat{IOX}$ tels que $X \in \{A;B;C;D;E;F;J;H;I;J;K\}$
2. Écrire, l'ensemble de toutes les mesures en radian de l'angle $\widehat{IOA}$ dans chacun des neufs cas.

3. Donner deux nouvelles mesures de l'angle $\widehat{IOA}$ dans chacun des neufs cas.

Maintenant que nous avons établi comment trouver les mesures en radian associés à un angle géométrique, il est intéressant de se restreindre (pour un usage plus pratique) à une seule mesure. Pour faire cela, on introduit la définition suivante :

Définition 5.2.2 — Mesure principale d'un angle géométrique.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique centré en O et donc l'origine des angle est notée I.
On considère M un point du cercle $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IOM}$ admet comme mesure en radian θ.
On dit qu'une mesure θ' est **une mesure principale de** $\widehat{IOM}$ si et seulement si :

- $\theta' \in \{\theta + 2k\pi \quad | \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- $\theta' \in]-\pi;\pi]$

R La mesure principale d'un angle géométrique est **unique**.

■ **Exemple 5.3**
On considère, dans les mêmes conditions de la définition, l'angle $\widehat{IOM}$ dont une mesure en radian est $\theta = \dfrac{125\pi}{2}$. Il est claire que cette mesure **n'est pas une mesure principale** puisque :

$$\frac{125\pi}{2} \notin]-\pi;\pi]$$

Afin de trouver la mesure principale associée à θ, la meilleure solution est **de décomposer θ en une somme d'un angle θ' et d'un multiple de** 2π tels que : $\theta' \in]-\pi;\pi]$.
Voici comment il faut procéder :

$$\begin{aligned} \frac{125\pi}{2} &= \frac{124\pi+\pi}{2} \\ &= 62\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= 2\times 31\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

L'égalité que nous venons d'établir permet de dire que les mesures $\dfrac{125\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ sont associées. De plus, nous avons $\dfrac{\pi}{2} \in]-\pi;\pi]$.

Conclusion : La mesure principale associée à $\theta = \dfrac{125\pi}{2}$ est $\dfrac{\pi}{2}$. ■

Exercice 5.4 — Déterminer une mesure principale associée.
Déterminer la mesure principale associée à chacune des mesures suivantes puis placer les sur un cercle trigonométrique :

1. $\alpha = \dfrac{43\pi}{5}$
2. $\beta = -\dfrac{97\pi}{5}$
3. $\theta = -\dfrac{77\pi}{6}$
4. $\gamma = 159\pi$
5. $\eta = \dfrac{47\pi}{4}$

5.3 Fonctions trigonométriques

5.3.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Vous avez vu, lors de vous années de collège que nous pouvions définir le cosinus et le sinus d'un angle à condition d'être dans un triangle rectangle. Le dessin suivant probablement quelque chose que vous avez appris par coeur : En analysant ces formules, vous vous rendez très vite compte qu'il

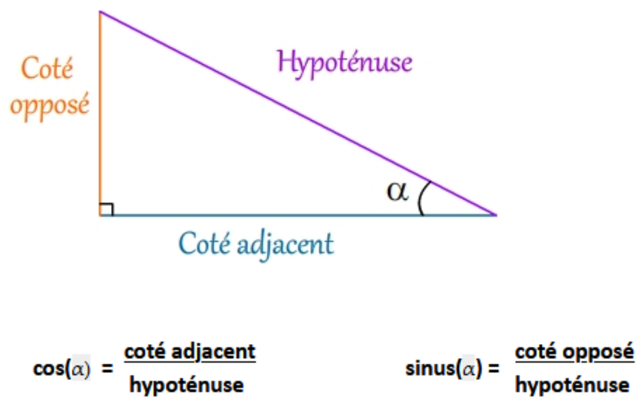


Figure 5.4: Vos formules du collège

y a deux problématiques majeures en lien avec cette façon de définir le cosinus et le sinus :

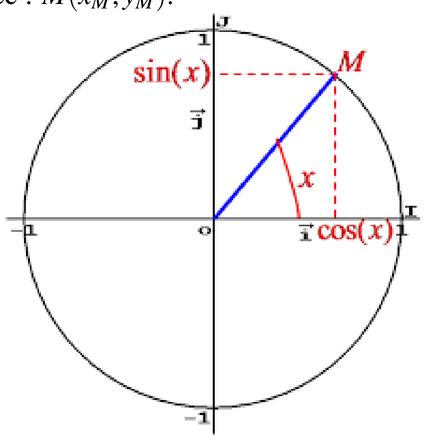
1. Les notions *cos* et *sin* sont limités aux angles aigus (i.e : $[0;90[$).
2. Les deux définitions sont conditionnés par l'existence d'un triangle rectangle.

Maintenant que nous avons une meilleure façon de mesurer les angles, nous allons étendre ces notions **pour couvrir toute la droite réelle**.

Définition 5.3.1 — Cosinus et sinus d'un nombre réel.
Soit x un nombre réel quelconque.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique centré en O et donc l'origine des angle est notée I dans repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Le nombre x peut toujours être associé à un point M du cercle $\mathscr{C}$ de façon à ce que x soit une mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$.
On définit les nombres réels $cos(x)$ et $sin(x)$ par :

$$cos(x) = x_M \quad et \quad sin(x) = y_M$$

Avec : $M(x_M;y_M)$.



■ **Exemple 5.4**
Il est très simple de vérifier sur un cercle trigonométrique que : $sin(0) = 0$ et que $cos(0) = 1$. ■

R

1. Cette façon de définir les fonctions cos et sin, nous permet donc de les étendre à l'intégralité de $\mathbb{R}$. Ainsi, nous pouvons écrire que :
$$cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad et \quad sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
2. Toutefois, nous pouvons nous apercevoir (et c'est assez simple à démonter) que l'idée de la projection fait que les valeurs de cos et sin vérifient la propriété suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cos(x) \in [-1;1] \quad et \quad sin(x) \in [-1;1]$$
Il est donc plus judicieux d'écrire :
$$cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1] \quad et \quad sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$$
3. Les valeurs des deux fonctions trigonométriques pour les mesures d'angles usuelles sont regroupées sur le cercle ci-dessous. Le cosinus se lit sur les axes des abscisses et le sinus sur l'axe des ordonnées. **Il est très recommandé de les apprendre par coeur.**

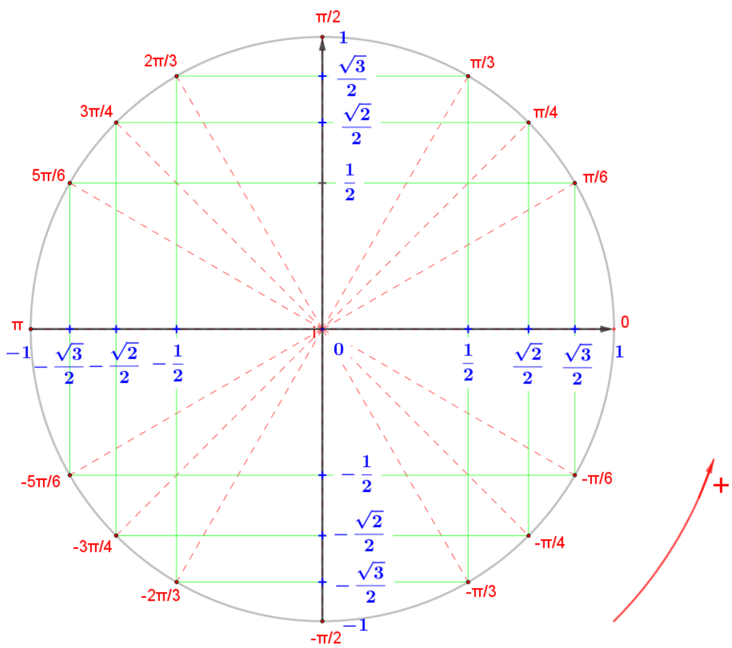


Figure 5.5: Images des mesures d'angles usuels par les fonctions cos et sin

Les résultats notés sur ce cercle se démontre en utilisant des techniques de géométrie euclidienne. **L'exercice qui suit à pour objectif de vous montrer un exemple de démonstration**.

Exercice 5.5 — Démontrer que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$**.**
Soit OHM un triangle isocèle et rectangle en H tel que $OM = 1$.
1. Tracer une représentation géométrique du triangle OHM.
2. Déterminer la valeur exacte de OH.
3. Déterminer la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{HOM}$
4. En déduire que : $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Propriété 5.3.1 — Quelques propriétés algébriques des fonctions trigonométriques.
Les fonctions trigonométriques vérifient les propriétés suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:
1. $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$
2. $-1 \leq cos(x) \leq 1 \quad et \quad -1 \leq sin(x) \leq 1$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad cos(2k\pi + x) = cos(x)$ et $sin(2k\pi + x) = sin(x)$.
4. $cos(-x) = cos(x)$ et $sin(-x) = -sin(x)$.
5. $cos(\pi - x) = -cos(x)$ et $sin(\pi - x) = sin(x)$.
6. $cos(\pi + x) = -cos(x)$ et $sin(\pi + x) = -sin(x)$.
7. $cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sin(x)$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos(x)$.
8. $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -sin(x)$ et $sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = cos(x)$.

■ **Exemple 5.5**
Les propriétés énoncées ci-dessus sont souvent utilisées en combinaison avec les valeurs trigonométriques associées aux angles usuels. Cela permet de calculer le cosinus ou le sinus d'angles moins traditionnels. Par exemple :

1. Calculons $cos\left(\frac{6\pi}{4}\right)$:
   Voici comment il faut procéder :
$$cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) = cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
2. De la même façon, calculer $sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

■

Exercice 5.6 — calculs trigonométriques.
Déterminer la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :
1. $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
2. $cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) - sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
3. $3cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 8sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$
4. $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Exercice 5.7 — utilisation des formules des angles associés.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier au maximum les expressions suivantes :
   - $A = sin(3\pi - x) + sin(x - 4\pi) - cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
   - $B = cos(3\pi - x) + cos(x - 4\pi) - sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
2. Sans utiliser une calculatrice, calculer :
$$A = sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) + sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) + sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

5.3.2 Propriétés analytiques des fonctions cosinus et sinus

Maintenant que nous avons réussi à étendre la notion de **cosinus** et **sinus** à l'ensemble des nombres réels, il ne reste plus qu'à étudier l'aspect analytique de ces fonctions sur $\mathbb{R}$ et à les représenter graphiquement.
Mais avant de le faire, rappelons la notion suivante :

Définition 5.3.2 — fonction T-périodique.
Soient $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et $T \in \mathbb{R}$
On dit que la fonction f est **T-périodique** lorsqu'elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

Nous avons déjà établi dans la propriété 5.3.1 les deux caractéristiques suivantes :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad cos(2k\pi + x) = cos(x) \quad et \quad sin(2k\pi + x) = sin(x)$$

Dans le cas particulier de $k = 1$, on obtient donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cos(2\pi + x) = cos(x) \quad et \quad sin(2\pi + x) = sin(x)$$

Ainsi, d'après la définition 5.3.2 **les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques**.

R **Pourquoi s'intéresser à la périodicité d'une fonction ?**
Géométriquement, dire qu'une fonction f est T-périodique revient à dire que sa courbe représentative C_f sur $\mathbb{R}$ n'est rien d'autre qu'une répétition infinie du tronçon de la courbe sur $[0;T]$. **Cela nous permet donc de limiter l'étude des variations de f à l'intervalle** $[0;T]$.
Le reste de la courbe s'obtient par translation horizontale.

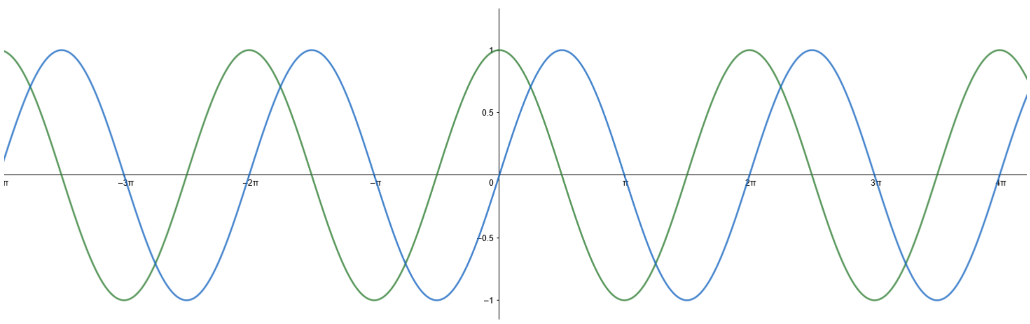
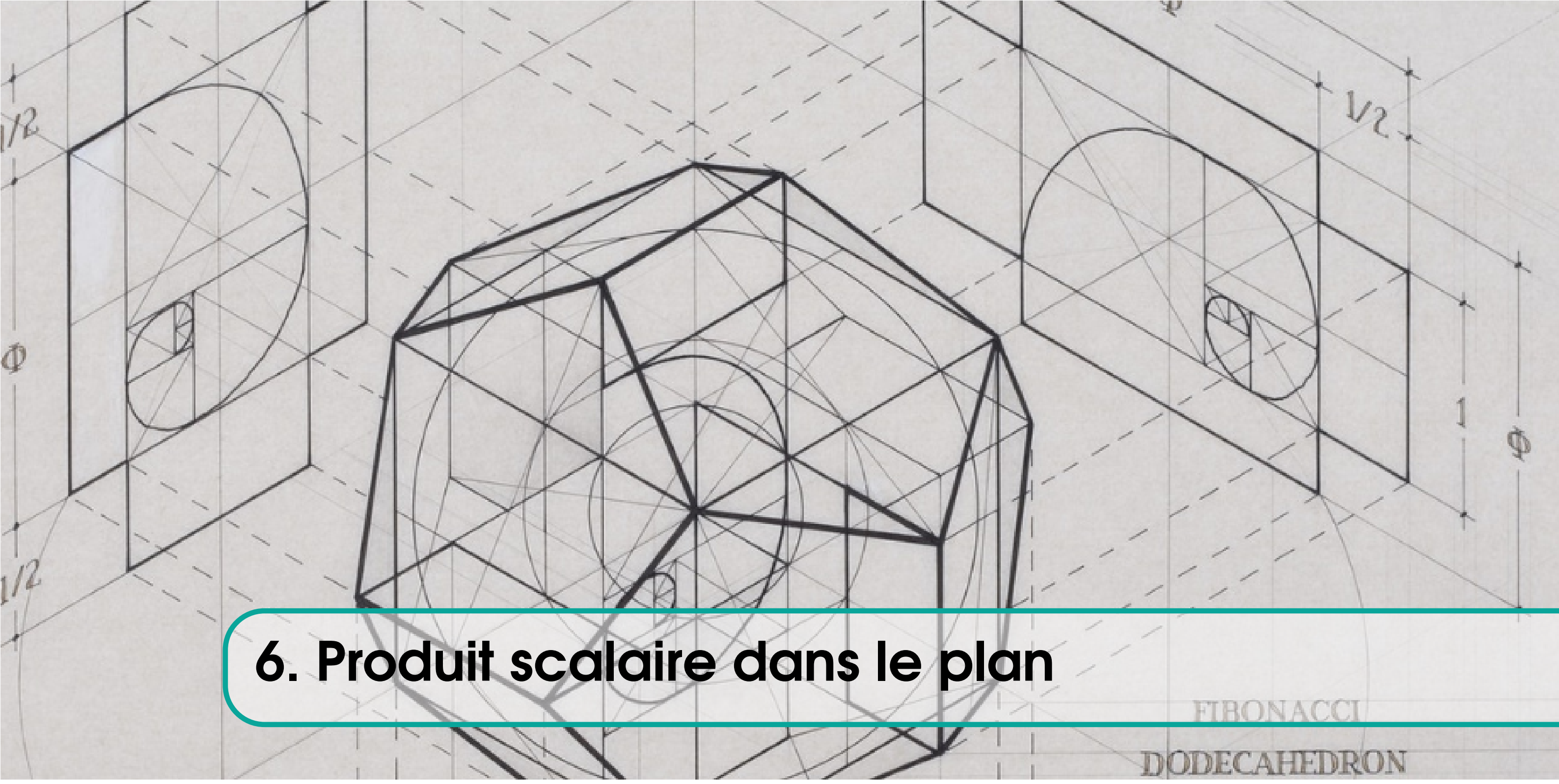


Figure 5.6: Représentations graphiques des fonctions *cos* et *sin*



6. Produit scalaire dans le plan

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent (celui des fonctions trigonométriques), nous nous somme posé la question suivante :

Y a-t-il un lien d'exprimer les angles en fonction des vecteurs ?

Cela nous a amené à généraliser la notion de fonctions trigonométriques à $\mathbb{R}$ et à adopter une nouvelle unité de mesure pour les angles qu'est le **radian**.
Toutefois, cela ne répond toujours pas à la question ci-dessus (choses qui est passée complètement inaperçue !!)
Il est maintenant temps de trouver une théorie qui permet d'étudier les propriétés des angles géométriques grâce à du calcul vectoriel. Autrement dit, en faisant un lien entre un angle et des vecteurs. Pour réussir ce tour de force, **William Hamilton** invente la notion du produit scalaire en 1853.
On le définit comme étant **le défaut d'orthogonalité** exprimé en fonction de la différence des deux membres de l'égalité de Pythagore.

6.2 Le défaut d'orthogonalité ?

Lorsqu'on commence à réfléchir au lien entre les angles et les vecteurs (leurs normes surtout), on pense naturellement au théorème de Pythagore dans un triangle rectangle : **C'est la situation la plus élémentaire dans laquelle un angle (droit) est caractérisé par une égalité vectorielle**.
Afin de mieux l'expliquer, considérons la situation suivante :
On considère un triangle ABC rectangle en B quelconque. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
Vous savez tous que nous pouvons écrire :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ et } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$$

Cela ne permet donc de récrire l'égalité de Pythagore de la façon suivante :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Ainsi, on peut dire que l'angle $\widehat{ABC}$ admet une mesure principale de $\theta = \frac{\pi}{2}$ si et seulement si :

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 0$$

Posons $d = ||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2$ et intéressons nous plus à cette quantité là :
Nous venons de dire qu'elle est nulle si l'angle est droit. Il en résulte naturellement que $d \neq 0$ dans le cas contraire. Nous allons appeler cette quantité **le défaut d'orthogonalité**.
Voici les différents cas possibles lorsque le triangle ABC n'est pas rectangle (H est le pied de la hauteur issue de C) : Afin de considérer d **comme un critère viable de mesure du défaut de**

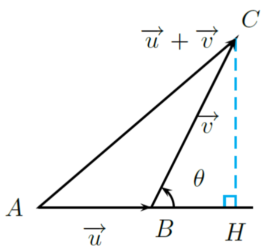


FIG. 1 – Cas 1

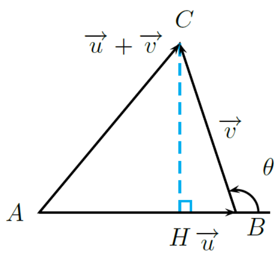


FIG. 2 – Cas 2

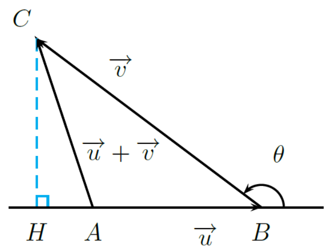


FIG. 3 – Cas 3

Figure 6.1: Situations possibles lorsque le triangle ABC n'est pas rectangle

l'orthogonalité et faire le lien avec l'angle θ, il va falloir s'assurer **que la formulation de ce lien ne dépends pas du cas de figure.**
Voici les étapes à suivre pour s'en assurer :

1. Pour chacune des figures ci-dessus, montrer que :

$$d = AC^2 - AB^2 - BC^2 = AH^2 - AB^2 - BH^2 \qquad (E)$$

2. On s'intéresse maintenant au **Cas 1** : A, B et H sont alignés dans cet ordre donc on peut écrire : $AH = AB + BH$.
   (a) Déduire de (E) que $d = 2AB \times BH$.
   (b) Démontrer alors que $d = 2AB \times AC\cos(\theta)$
3. On s'intéresse maintenant au **Cas 2** : A, H et B sont alignés dans cet ordre donc on peut écrire : $AH = AB - BH$.
   (a) Déduire de (E) que $d = -2AB \times BH$ et que $BH = BC\cos(\pi - \theta)$
   (b) En déduire que $d = 2AB \times AC\cos(\theta)$.
4. On s'intéresse maintenant au **Cas 3** : refaire le même procédé que pour le **Cas 2**.

On remarque alors que le nombre $\frac{d}{2}$ est complètement indépendant des différentes figures. Ceci nous permet d'affirmer que c'est **une caractéristique intrinsèque à deux vecteurs quelconques**.
C'est cette quantité là, que nous allons appeler **le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.**

6.3 Les différentes façons de définir le produit scalaire

Définition 6.3.1 — définition du produit scalaire.
Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan euclidien noté $\mathscr{P}$.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, **le nombre réel** noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} := \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

R Par convention, on note : $\vec{u}.\vec{u} := \vec{u}^2$

■ **Exemple 6.1** On considère la configuration géométrique suivante :
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. ■

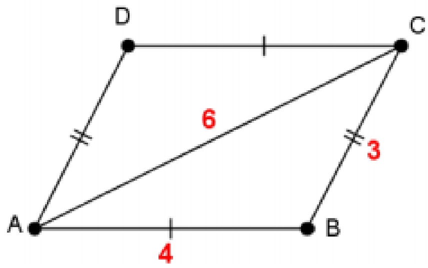


Figure 6.2:

Le produit scalaire a la particularité de pouvoir être définit de différentes façons. Nous venons d'en voir une. Maintenant, nous allons démontrer qu'il peut aussi être calculé via deux autres forum les. Autrement dit, nous allons introduire deux autres définitions équivalentes à la définition 2.3.1.

Théorème 6.3.1 — deux autres façons de définir $\vec{u}.\vec{v}$.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

2. définition projective du produit scalaire:

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\vec{u};\vec{v})$$

■ **Exemple 6.2**
On considère un triangle équilatéral ABC tel que $AB = AC = BC = 5cm$.
1. Faire une représentation graphique de ce triangle.
2. Calculer les produit scalaire suivants de différentes méthodes : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

■

6.4 Propriétés du produit scalaire

Propriété 6.4.1 — Propriétés du produit scalaire.
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Alors :
1. Le produit scalaire est **commutatif** : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. Le produit scalaire est **distributif** par rapport à l'addition de deux vecteurs :

$$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

3. Le produit scalaire est distributif par rapport à la multiplication par un scalaire :

$$\forall a,b \in \mathbb{R}; \quad (a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)\vec{u}.\vec{v}$$

4. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de même sens**, alors : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
5. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** et **de sens contraires**, alors : $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$
6. Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** , alors : $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$

■ **Exemple 6.3**

1. Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$, $B(5;-5)$, $C(-1;3)$ et $D(2;2)$.
   (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$
   (b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$
   (c) Calculer les coordonnées de $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   (d) Calculer $\vec{u}.\overrightarrow{CD}$.
   (e) Que remarquez-vous ?
2. On considère deux vecteurs du plan notés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} = -\vec{v}$.
   Montrer que $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}||^2$.

■

Définition 6.4.1 — Projection orthogonale.
Soient A un point et (d) une droite dans un plan euclidien $\mathscr{P}$.
On appelle **projection orthogonale de** A **sur** (d), le point H tel que : $(AH) \perp (d)$

Propriété 6.4.2
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si: $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Théorème 6.4.3 — Produit scalaire et projection.
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs du plan euclidien $\mathscr{P}$.
On note H et K les projections orthogonales respectives de C et D sur la doite (AB).
Alors,
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KH}$ de même sens $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = AB \times KH$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KH}$ de sens contraires $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = -AB \times KH$.

6.5 Applications du produit scalaire : Relations métriques dans un triangle.

Le produit scalaire est un outil très puissant en géométrie. Il permet notamment de généraliser certaines des notions que vous connaissez déjà (théorème de Pythagore) et de démontrer assez facilement quelques théorèmes de la géométrie grecque de façon rapide et efficace.
Dans cette partie, nous allons aborder trois résultats géométriques très intéressants qu'on peut prouver grâce au produit scalaire :

1. La relation d'Al-Kashi: **Al-Kashi** mathématicien Perse du 14ème siècle généralise la relation de Pythagore en adaptant son égalité à n'importe quel triangle.
2. Relation des sinus : On la doit à un mathématicien arabe du 13ème siècle du nom de **Al-Tusi**. Ce théorème permet de lier les rapports entre le sinus d'un angle et la longueur du coté opposé dans un triangle quelconque.
3. Théorème de la médiane: Démontré par **Apollinus de Perge** au 2ème sciècle Av.J.C. C'est

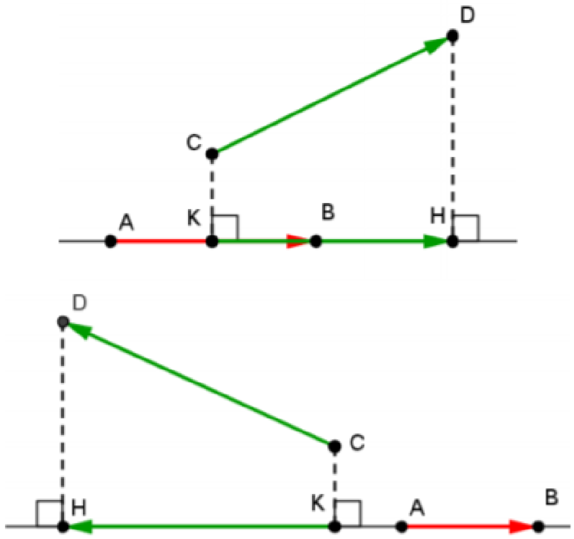


Figure 6.3: Exemple d'une situation du théorème 2.3.3

un théorème qui permet de lier les différentes longueurs dans un triangle à sa médiane.

Théorème 6.5.1 — Relation d'Al-Kashi.
Soit ABC un triangle quelconque du plan.
On note a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. Alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\hat{A})$$

Théorème 6.5.2 — Relation des sinus.
Soit ABC un triangle quelconque du plan.
On note a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. Alors :

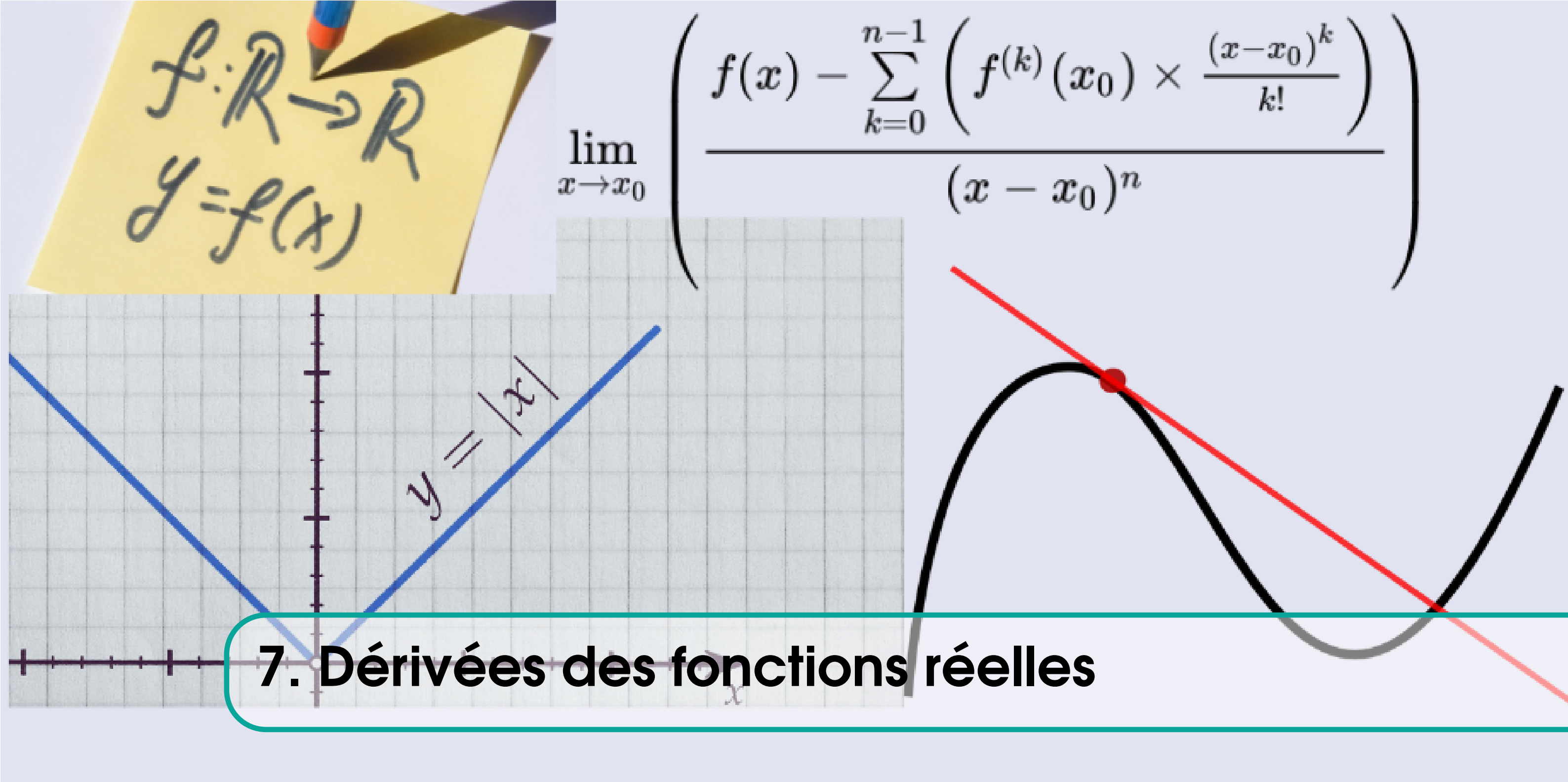
$$\frac{sin(\hat{A})}{a} = \frac{sin(\hat{B})}{b} = \frac{sin(\hat{C})}{c}$$

Théorème 6.5.3 — Théorème de la médiane.
Soient ABC un triangle quelconque du plan et I le milieu de $[BC]$.
Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

V

ANALYSE



7. Dérivées des fonctions réelles

7.1 Introduction

En mathématiques, ***l'analyse*** est la branche qui s'occupe du traitement explicite des notions **des limites, des dérivées et de l'intégration**. Ces notions permettent toutes d'étudier des fonctions avec une approche **infinitésimale**.

Le calcul infinitésimale est une approche qui consiste à étudier le comportement local d'une fonction sur un voisinage très restreint d'un point avant d'étendre les résultats globalement sur tout le domaine de définition.

On doit la notion de dérivée, qui permet d'étudier les variations d'une fonction quelconque, aux travaux de d'**Isaac Newton** et de **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Tous les deux se sont intéressés au problème de l'étude des variations en s'inspirant des travaux de **Wallis**, de **Descartes** et de **Fermat**.

Newton appellera la nouvelle notion une "*fluxion*" et introduira les notations encore utilisées en physique $\dot{x};\ddot{x}$...

$f'(x)$: la notation usuelle de la dérivée d'une fonction f, celle qui est actuellement d'usage en mathématiques a été introduire par le mathématicien **Joseph-Louis Lagrange**. C'est aussi à lui que nous devons le nom de **dérivée** pour désigner cette notion.

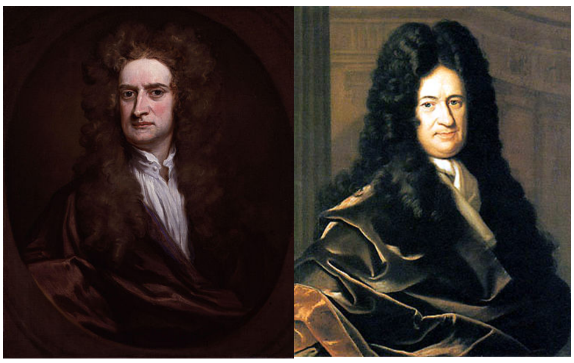


Figure 7.1: Portraits de Newton (à gauche) et de Leibniz (à droite)

7.2 Nombre dérivé et tangente

Lorsque vous avez étudié les variations d'une fonction affine d, définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(x) = ax + b \qquad avec \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$$

Vous avez vu qu'on pouvait déterminer les variations de d simplement en évaluant **le signe du coefficient directeur** a grâce au théorème suivant :

Théorème 7.2.1 — Variations d'une fonction affine.
Soit d une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = ax + b$. Alors, nous avons:
- d est croissante si et seulement si $a \geq 0$.
- d est décroissante si et seulement si $a \leq 0$

Vu la simplicité d'évaluer le signe d'un nombre, nous avons tout intérêt à généraliser ce concept à une fonction quelconque f.
Bien évidement, contrairement à une droite, une fonction quelconque f **ne gardera pas nécessairement les mêmes variations sur son domaine de définition**. Afin de prendre cette contrainte en compte, nous allons créer une **quantité locale** dont le signe nous permettra de connaître les variations de la fonction f **au voisinage d'un point donné** de coordonnées $(a; f(a))$.
Cette quantité s'appelle **le nombre dérivé de f en a**.

Définition 7.2.1 — taux d'accroissement ou encore taux de variation.
Soient f une fonction réelle et $a \in D_f$ un nombre réel.
Pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle **taux d'accroissement de f entre a et $a+h$**, le nombre réel $\mathscr{T}(h)$ définit par:

$$\mathscr{T}(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

R Il faut comprendre que le taux d'accroissement n'est rien d'autre que **le coefficient directeur**

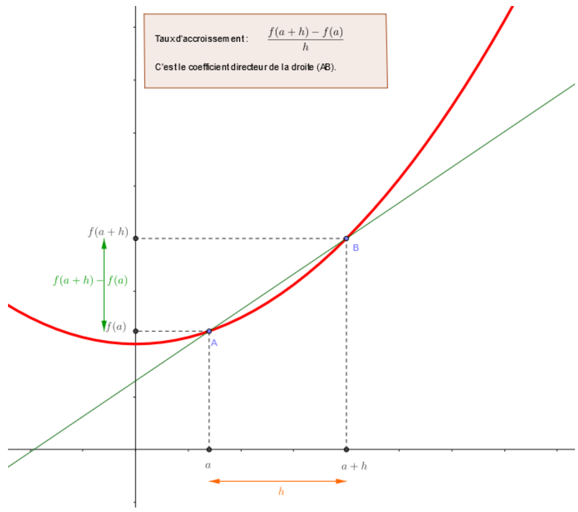


Figure 7.2: Interprétation graphique du taux d'accroissement

de la droite reliant les points d'abscisses a et $a+h$.
A condition que la fonction f ne change pas de variations, on ce rends compte que la droite résultante **reproduit le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle** $[a; a+h]$.

Exercice 7.1 Calculer le taux d'accroissement au voisinage d'un point d'abscisse a pour chacune des fonctions suivantes (simplifier le résultat au maximum).

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = \sqrt{x}$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = 5$
5. $f(x) = x^n; \quad n \in \mathbb{N}$

Définition 7.2.2 — Nombre dérivé en un point.
Soient f une fonction réelle et $a \in D_f$ un nombre réel.
On dit que la fonction f est **dérivable au point d'abscisse** a si la limite du taux d'accroissement $\mathscr{T}_a(h)$ lorsque $h \longrightarrow 0$ **existe et est finie.** On note alors :

$$f'(a) = \lim_{h \longrightarrow 0} \mathscr{T}_a(h)$$

Cette limite s'appelle **le nombre dérivé au point d'abscisse a**.

■ **Exemple 7.1**

- **Un cas où le nombre dérivé existe:**
  On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par:

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3$$

  On cherche à calculer, s'il existe, le nombre dérivé de f au point d'abscisse $a = 1$.
  Nous avons déjà vu auparavant (Exercice précédent) que :

  $$\mathscr{T}_a(h) = 3a^2 + 3ah + h^2$$

  Ainsi, on en déduit que :

  $$\mathscr{T}_1(h) = 3 + 3h + h^2$$

  Et que :

  $$\lim_{h \longrightarrow 0} \mathscr{T}_1(h) = \lim_{h \longrightarrow 0} 3 + 3h + h^2 = 3$$

  Ainsi, $f'(1)$ existe et il est égal à 3.
- **Un cas où la fonction n'est pas dérivable en un point car non définie en ce point:**
  On considère maintenant la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$
  1. Donner le domaine de définition de f.
  2. Calculer le taux d'accroissement au point d'abscisse 0, noté $\mathscr{T}_0(h)$.
  3. Conjecturer à l'aide de la calculatrice, $\lim_{h \longrightarrow 0} \mathscr{T}_0(h)$ puis conclure.
- **Cas ou la fonction est définie, mais pas dérivable en un point :** Le cas de la fonction valeur absolue (nous allons le voir en détail en classe).

■

R (Interprétation graphique du nombre dérivé en un point)
Nous avons déjà expliqué que le taux d'accroissement n'est rien d'autre que **le coefficient directeur** de la droite (d) passant par les points $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$.
Lorsqu'on fait tendre h vers 0, cela revient à rapprocher le point B au maximum du point A jusqu'à ce que l'écart soit négligeable.
Ainsi, la droite (d) s'approchera de plus en plus vers une autre droite (T) qui ne croise la courbe C_f qu'au point A (Au voisinage de celui ci seulement: c'est un comportement local).
La droite (T) s'appelle **La tangente à C_f au point d'abscisse** a. Son coefficient directeur est $f'(a)$.

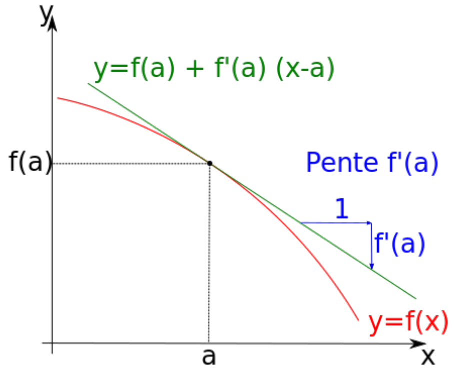


Figure 7.3: Tangente à C_f en un point d'abscisse a

Théorème 7.2.2 — Équation de la tangente en un point.
Soient f une fonction réelle et $a \in D_f$ tels que f est dérivable en a.
La tangente à C_f au point d'abscisse a, notée (T_a) admet pour équation réduite:

$$(T_a) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

■ **Exemple 7.2**

- Reprenons l'exemple avec la fonction réelle: $f(x) = x^3$.
  Nous avons déjà montré que la fonction f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 3$.
  Ainsi, l'équation de la tangente en 1 est donnée par:

$$\begin{aligned} y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad &\Leftrightarrow \quad y = 3(x-1)+1 \\ &\Leftrightarrow \quad y = 3x-2 \end{aligned}$$

- Donner l'équation de la tangente à la courbe C_f dans chacun des cas suivants:
  1. $f(x) = x^2$ et $a = 4$.
  2. $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 2$.
  3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a = -1$
  4. $f(x) = x^n$ et $a = 0$ (Avec $n \in \mathbb{N}^*$).

■

R

1. Une fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) en $a \in D_f$ lorsque la tangente à la courbe C_f est **horizontale** au point de coordonnées $(a; f(a))$.
2. Une tangente (T_a) est horizontale si et seulement si $f'(a) = 0$

7.3 La fonction dérivée

7.3.1 Construction

Nous avons vu dans le paragraphe précédent comment construire le nombre dérivé en chaque point d'une courbe de la fonction f qu'on note C_f. Le nombre dérivé $f'(a)$ a la particularité de donner une indication sur le sens de variation de f **localement : C'est à dire dans un voisinage très restreint du point de coordonnées** $(a; f(a))$.
Tout ce qui nous reste maintenant, c'est d'étendre cette notion pour qu'elle couvrent la totalité de D_f le domaine de définition de la fonction f.

Définition 7.3.1 — la fonction dérivée.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
On appelle la fonction dérivée de f, et on note f' la fonction définie sur I par:

$$\begin{array}{rcl} f': \quad I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \end{array}$$

C'est la fonction qui associe à chaque élément $x \in I$, le nombre dérivé $f'(x)$.

7.3.2 Dérivées des fonctions usuelles et opérations

Vous avez vu - dans la première partie de ce chapitre- à quel point calculer le nombre dérivé peut s'avérer difficile. Une façon de contourner ce problème de calcul fastidieux est **de combiner une connaissance des dérivées des fonctions usuelles avec les règles d'opérations sur les dérivées**. Le théorème suivant énumère les dérivées des fonctions usuelles que vous connaissez jusqu'ici.

Théorème 7.3.1 — dérivée des fonctions usuelles.
Le tableau suivant donne les formules des dérivées des fonctions usuelles :

Dérivées des fonctions usuelles		
Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalles de dérivabilité
$f(x) = k$ (constante réelle)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} = x^{-n} \ (n \in \mathbb{N})$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$]0; +\infty[$ $]-\infty; 0[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exercice 7.1
Donner la dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant son domaine de dérivabilité:
1. $f(x) = 125$.
2. $f(x) = x^{15}$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$.

■

Le théorème ci-dessus n'est bien évidement pas suffisant pour espérer calculer les dérivées des fonctions quelconques. Il faut en plus **comprendre comment opérer sur les dérivées des fonctions usuelles selon les opérations appliquées à ces dernières**. Ces opérations sont détaillées dans le théorème suivant :

Théorème 7.3.2 — Opérations sur les dérivées.
Soient $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I.
Alors :

1. $\forall x \in I; \quad (u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
2. $\forall k \in \mathbb{R}; \forall x \in I; \quad (ku)'(x) = k \times u'(x)$.
3. $\forall x \in I; \quad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
4. $\forall n \in \mathbb{N}; \forall x \in I; \quad (u(x)^n)' = nu'(x)u(x)^{n-1}$.
5. Si $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors:
   - $\forall x \in I; \quad \left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{v(x)^2}$.
   - $\forall x \in I; \quad \left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$.

R Important : Il m'arrive souvent de **faire un abus de langage afin de simplifier les écritures**. Il faut comprendre que c'est une notation que j'introduis et que j'utilise en toute connaissance de cause. Mais, il ne faut surtout pas la prendre par ce qu'elle n'est pas.
Je m'explique davantage : Pour des raisons pratiques, j'écris souvent $(f(x))'$ au lieu de $f'(x)$. C'est juste une notation et il ne faut surtout pas la prendre au sens directe.
Exemple : Quand je note $(x^2)'$ je veux dire par cela la dérivée de la fonction carrée évaluée en x (dérivée qui vaut $x \mapsto 2x$), et non la dérivée du nombre x^2 (qui est toujours égale à 0).

■ **Exemple 7.3**

1. En utilisant les formules ci-dessus ainsi que le tableau du théorème 4.3 donner l'expression des dérivées des fonctions suivantes :
   - $f(x) = x^2 + 3x - 5$.
   - $f(x) = x\sqrt{1+x}$.
   - $f(x) = \dfrac{1}{x^{12} + 12}$.
   - $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3+x}$.
2. **Déterminer le domaine de dérivabilité d'une fonction:**
   Il faut savoir qu'une fonction n'est pas automatiquement dérivable sur son domaine de définition en entier. Prenons comme exemple la fonction $f(x) = x\sqrt{1+x}$ dont vous avez déjà calculé la dérivée.
   Le domaine de définition de cette fonction est donné par:
   $$D_f = \{x \in \mathbb{R} | 1 + x \geq 0\} = [-1; +\infty[$$
   Par contre, la fonction racine carrée n'est pas du tout dérivable en 0. Cela exclu -1 du domaine de dérivabilité. Ainsi elle n'est dérivable que sur $]-1; +\infty[$

■

7.4 Dérivée et variations d'une fonction

Maintenant que nous pouvons enfin déterminer le nombre dérivé en tout point de la courbe C_f, il ne nous reste plus qu'à trouver un lien entre **son signe** et **les variations de la fonction** f - comme nous l'avions énoncé au début du chapitre.

Théorème 7.4.1 — Variations d'une fonction dérivable.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Nous avons les résultats suivants :
1. f croissante sur I si et seulement si $\quad \forall x \in I; f'(x) \geq 0$.

2. f décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I; f'(x) \leq 0$.
3. f constante sur I si et seulement si $\forall x \in I; f'(x) = 0$.

■ **Exemple 7.4**

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x^3 + 2x$
   f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, nous avons :
   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad f'(x) = 3x^2 + 2$$
   Il est très facile de démontrer que la dérivée f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on peut on déduire que la fonction f est **croissante sur** $\mathbb{R}$.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

■

7.5 Dérivées et extrema d'une fonction

Définition 7.5.1 — Minimum / Maximum d'une fonction f.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
1. On dit que f **admet un maximum sur I, atteint en a** si $\forall x \in I$, on a : $f(x) \leq f(a)$.
2. On dit que f **admet un minimum sur I, atteint en a** si $\forall x \in I$, on a : $f(x) \geq f(a)$.

On dit que m est **un extremum** de la fonction f, s'il est un minimum ou un maximum de la fonction.

■ **Exemple 7.5**
Un polynôme de second degré noté $p(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum sur $\mathbb{R}$ atteint au point d'abscisse $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$. Le démonstration de ce résultat est laissé à titre d'exercice. ■

Théorème 7.5.1 — extremum et valeur de la dérivée.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Nous avons le résultat suivant :
$$f \text{ admet un extremum en } x \in I \Longleftrightarrow f'(x) = 0 \text{ et } f \text{ change de signe en } x.$$

Exercice 7.2
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:
$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 5$$
1. Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ puis tracer son tableau de signe.
3. Tracer le tableau de variations de f.
4. En déduire les coordonnées des extremums de la fonction f.

■